NUMEROS Y SUS FACTORES

National Council of Teachers of Mathematics

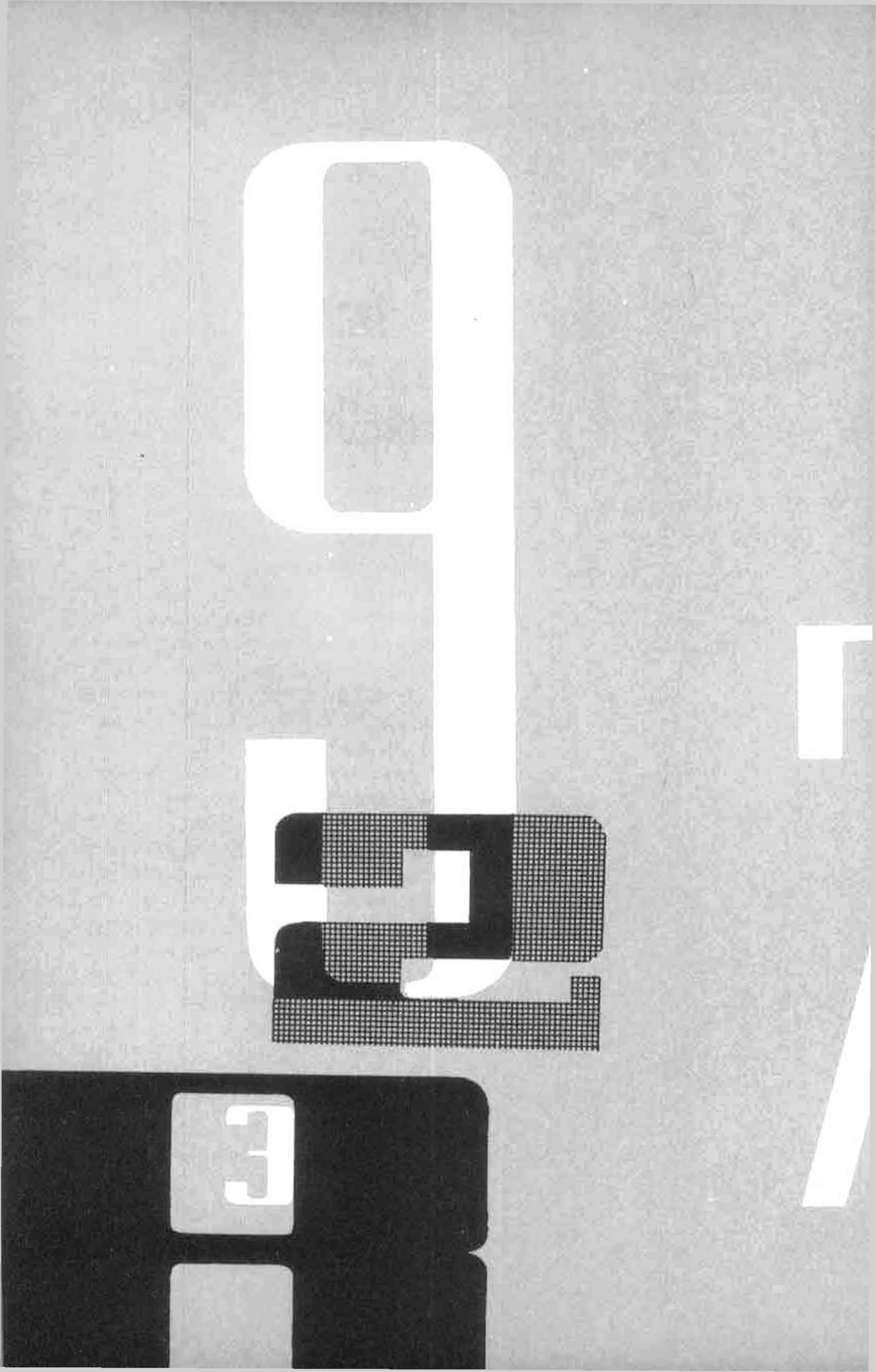
5. NUMEROS Y SUS FACTORES

El contenido de este cuaderno constituye un estudio elemental de aquellas propiedades más importantes de los números enteros en relación con las operaciones fundamentales. En particular define los números primos y compuestos para estudiar posteriormente el Máximo Común Divisor y el mínimo común múltiplo. Analiza además las pruebas de divisibilidad. Este cuaderno es uno de la serie de ocho, escrita para maestros de enseñanza elemental y media, y alumnos de este último ciclo. Cada cuaderno comprende la exposición de un tema básico de matemáticas. Estos temas se hallan entre los que el maestro necesita dominar para tener una comprensión más cabal de la matemática que usualmente se enseña en esos grados. Cada cuaderno es la introducción a un tema, no un tratado exhaustivo.
Los temas escogidos son especialmente importantes para aquellos maestros que consideran que las experiencias de aprendizaje transmitidas a los niños del ciclo elemental deberían empezar por el desarrollo de algunos conceptos unificadores básicos en matemáticas, y para los alumnos de nivel medio y superior que deseen comprender más a fondo los conceptos básicos de la matemática tratados en cada uno de estos cuadernos.
Es el deseo de los autores y del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) que esta serie de cuadernos pueda auxiliar tanto a los maestros en

Temas

Colección de

matemáticas


9
2
3

5

Números y sus factores

National Council of
Teachers
of Mathematics
U.S.A.

traducción de
Federico Galván Anaya
profesor de matemáticas
de la U.N.A.M.

Editorial F. Trillas, S. A.
México, 1970

Título de esta obra en inglés:
Topics in Mathematics for Elementary School Teachers
Booklet Number 5. Numbers and Their Factors

Primera edición en inglés, 1964
Tercera reimpresión en inglés, 1965

Primera edición en español, 1968
Primera reimpresión en español, mayo 1970

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Impreso en México

Prefacio

Este cuaderno es uno de la serie de ocho, escrita para maestros de enseñanza elemental más bien que para los alumnos. Cada cuaderno comprende la exposición de un tema básico de matemáticas. Estos temas se hallan entre los que el maestro de enseñanza elemental necesita dominar para tener una comprensión más cabal de la matemática que suele enseñarse en la escuela de ese grado. Cada cuaderno es la introducción a un tema, no un tratado exhaustivo. El lector interesado debe estudiar el tema con mayor profundidad en otras obras.

Los temas escogidos son especialmente convenientes para aquellos maestros que creen que las experiencias de aprendizaje, transmitidas a los niños en los primeros años de la escuela, deberían empezar por el desarrollo de algunos conceptos unificadores básicos en matemáticas. Muchos profesores han observado que su educación profesional no los prepara para enseñar aritmética de modo congruente con este punto de vista. Es el deseo de los autores y del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) que esta serie de cuadernos pueda ser una ayuda para estos profesores, así como para otros que también están interesados en mejorar su instrucción.

Los títulos de los cuadernos de esta serie son los siguientes:

Cuaderno 1. *Conjuntos*
Cuaderno 2. *Números enteros*
Cuaderno 3. *Sistemas de numeración para los números enteros*
Cuaderno 4. *Algoritmos de las operaciones con números enteros*
Cuaderno 5. *Números y sus factores*
Cuaderno 6. *Números racionales*
Cuaderno 7. *Sistemas de numeración para los números racionales*
Cuaderno 8. *Proposiciones numéricas*

Aconsejamos que, si es posible, los cuadernos sean leídos en el orden numérico correspondiente, con excepción del octavo (*Proposiciones numéricas*), que puede apartarse del orden citado.

Escribieron los cuadernos los miembros de un grupo de verano (Summer Writing Group) cuyos nombres se indican en la lista inscrita al final del prefacio. El proyecto fue iniciado y patrocinado por el Comité Suplementario de Publicaciones del NCTM (The NCTM Supplementary Publications Committee) bajo la presidencia de Kenneth B. Henderson. Fué financiado por el NCTM.

EDWIN F. BECKENBACH
HELEN CURRAN
WALTER FLEMING
GERALDINE GREEN
LOLA MAY
MARLENE SCHROEDER
MARGARET F. WILLERDING
WILLIAM WOOTON
LENORE JOHN, *Coordinadora*

Indice

Advertencia 9

Números pares y números impares 10

Propiedades de los números pares e impares 12

Grupo de ejercicios 1 *13*

Factores y múltiplos 14

Grupo de ejercicios 2 *16*

Números primos y números compuestos 16

La criba de Eratóstenes 19

Grupo de ejercicios 3 *20*

Pruebas de divisibilidad 20

Divisibilidad entre 2, 5, 10 22

Divisibilidad entre 3 y 9 23

Grupo de ejercicios 4 *26*

Pruebas de divisibilidad en otros sistemas de numeración 26

Grupo de ejercicios 5 *30*

Representación de un número como producto de números primos 31

Grupo de ejercicios 6 *34*

El método de primos consecutivos 35

Grupo de ejercicios 7 *37*

Determinación de primos 37

El conjunto de números enteros como unión de conjuntos disjuntos 39

Grupo de ejercicios 8 39

Máximo común divisor 39

Grupo de ejercicios 9 43

Mínimo común múltiplo 43

Grupo de ejercicios 10 46

Algunas preguntas acerca de los números 47

Algunas cosas que se saben acerca de los primos 47
Preguntas no contestadas acerca de los números primos 48
Algunas preguntas interesantes acerca de las sumas 49

Respuestas a los grupos de ejercicios 52

Números y sus factores

Cuaderno 5

ADVERTENCIA

Cuando se da una alarma para un simulacro de incendio, cada alumno sale con un compañero. La profesora Pérez, quien tiene treinta y dos alumnos, nota inmediatamente, sin contar, que falta por lo menos uno de sus alumnos. ¿Cómo lo sabe?

Las instrucciones para ordenar a los alumnos dicen: "Formar los alumnos en hileras, con igual número de alumnos cada una y cuando menos dos en cada hilera. Haga las hileras tan cortas como sea posible." Si el número de alumnos de varios grupos fluctúa entre 27 y 38 inclusive, ¿las hileras más grandes serán las del grupo más grande? ¿Por qué?

¿Si se añadiera un nuevo alumno a uno de los grupos, se podrían hacer hileras más pequeñas? ¿Bajo qué circunstancia sería éste el caso?

¿Hay alguna manera rápida de saber si el número 5 678 901 234 es divisible entre tres? Supóngase que los dígitos se reacomodan de la siguiente manera: 5 768 901 324. Si uno de los números es divisible entre tres, ¿el otro también lo es?

Las respuestas de las preguntas anteriores están relacionadas con ciertas propiedades de los números naturales. En páginas posteriores éstas y otras propiedades serán estudiadas.

Este cuaderno trata principalmente de la factorización de los números naturales —esto es, expresar los números naturales como productos de números naturales— y asuntos relacionados con éstos. El conjunto de los números enteros, W, como se recordará en el cuaderno 2: *Números enteros*, es el siguiente:

$$W = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Nótese que W es la unión del conjunto de los números naturales

$$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

y el conjunto $\{0\}$.

Como repaso, algunas de las propiedades de los números enteros se ejemplifican aquí con las expresiones siguientes:

$3+6=6+3$	(Propiedad conmutativa de la adición)
$4\times 11=11\times 4$	(Propiedad conmutativa de la multiplicación)
$(2+5)+43=2+(5+43)$	(Propiedad asociativa de la suma)
$(4\times 8)\times 12=4\times(8\times 12)$	(Propiedad asociativa de la multiplicación)
$3\times(12+7)=(3\times 12)+(3\times 7)$	(Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma)
$5+0=0+5=5$	(Elemento idéntico de la suma)
$8\times 1=1\times 8=8$	(Elemento idéntico de la multiplicación)
$0\times 7=7\times 0=0$	(Propiedad de la multiplicación por cero)

El conjunto de los números enteros, W, se puede expresar como la unión de conjuntos disjuntos de muchas maneras. Recuerde que dos conjuntos no vacíos son disjuntos si no tienen miembros en común.
Si

$$A=\{\text{todos los números enteros menores que } 80\},$$

y

$$B=\{\text{todos los números enteros mayores o iguales que } 80\};$$

entonces

$$W=A\cup B.$$

Todo número entero es miembro de A o de B, pero nunca de ambos. Consideremos ahora un importante par de subconjuntos disjuntos de W, los números pares y los impares.

NUMEROS PARES Y NUMEROS IMPARES

Un número entero que es el producto de cualquier número entero por 2, se llama *número par*. Para obtener los números pares, primero multiplicamos 2 por 0, por 1, luego por 2, después por 3, 4, 5, etc. Los cinco primeros números pares son:

$$0=2\times 0,$$
$$2=2\times 1,$$
$$4=2\times 2,$$
$$6=2\times 3,$$
$$8=2\times 4.$$

Si n es un número entero, entonces $(2\times n)$ es un número par.

Los números pares se definen también en términos de división entre 2, como sigue:

> *Un número entero es par si al dividirlo entre 2, el residuo es 0. Decimos en este caso que el número original es divisible entre 2. Por ejemplo, 18 es divisible entre 2.*

Si E representa el conjunto de todos los números pares, podemos escribir:

$$E=\{0, 2, 4, 6, \ldots\}.$$

Cuando un número entero se divide entre 2, el residuo es 0 ó 1. Según definimos, el número es par si el residuo es 0. Si el residuo es 1, llamamos al número original, *número impar*. El número 29 es impar porque cuando 29 se divide entre 2, el cociente resultante es 14 y su residuo 1. Los números 1, 3, 5, 7, 9 y 11 son los seis primeros números impares.

Si examinamos las siguientes proposiciones verdaderas,

$$1=(2\times 0)+1,$$
$$3=(2\times 1)+1,$$
$$5=(2\times 2)+1,$$
$$7=(2\times 3)+1,$$
$$9=(2\times 4)+1.$$

vemos que cada uno de los números 1, 3, 5, 7, 9 se expresa como la suma de un número par y el número 1. De hecho, cualquier número impar se puede expresar en la forma

$$(2 \times \text{un número entero})+1.$$

Hemos visto que $(2\times n)$ es un número par, cuando n es un número entero. Ahora vemos que

$$(2\times n)+1 \text{ es un número impar.}$$

Si F representa el conjunto de los números impares, podemos escribir,

$$F=\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}.$$

Puesto que todo número entero es par o impar, pero no ambos, el conjunto de los números pares y el de los impares son conjuntos disjuntos, cuya unión es el conjunto de los números enteros:

$$W = E \cup F.$$

Propiedades de los números pares e impares

Nuestro manejo frecuente de los números pares, desde luego, nos habrá convencido de lo siguiente:

1. La suma de dos números pares es otro número par.
2. El producto de dos números pares es otro número par.

Por ejemplo, escojamos los números 8 y 14:

$$8+14=22 \qquad (22 \text{ es un número par}),$$
$$8\times 14=112 \qquad (112 \text{ es un número par}).$$

¿Cómo podemos demostrar, en general, que dados *dos números pares cualesquiera* la suma de éstos es otro número par? Dados los números pares $2\times k$ y $2\times m$, donde k y m son números enteros (k y m pueden ser el mismo número entero o pueden ser números diferentes). Queremos demostrar que $(2\times k)+(2\times m)$ es un número par. Por la propiedad distributiva:

$$(2\times k)+(2\times m)=2\times(k+m).$$

Puesto que $(k+m)$ es un número entero $[2\times(k+m)]$, el producto de 2 por un número entero, es un número par. (¿Por qué?) El hecho de que la suma de dos números pares cualesquiera es otro número par, se expresa diciendo que el conjunto de números pares, E, *es cerrado respecto a la suma.*

Ahora demostremos que el producto de dos números pares cualesquiera es otro número par. En este caso los números son $2\times r$ y $2\times s$, donde r y s son números enteros. ¿Es $(2\times r)\times(2\times s)$ un número par? Por la propiedad asociativa de la multiplicación tenemos:

$$(2\times r)\times(2\times s)=2\times[r\times(2\times s)].$$

Ahora, $r\times(2\times s)$, el producto de dos números enteros, es un número entero. Por esto $2\times[r\times(2\times s)]$ es dos veces un número entero y, por tanto, es un número par. Entonces, E también es *cerrado respecto a la multiplicación.*

El conjunto F de los números impares no es cerrado respecto a la suma; de hecho, la suma de dos números impares cualesquiera es un número par.

El conjunto F es cerrado respecto a la multiplicación, es decir, el producto de dos números impares cualesquiera es otro número impar,

También se puede demostrar que la suma de un número par y un número impar es siempre un número impar, y que el producto de un número par y un número impar es siempre un número par.

Los cuadros I y II resumen simbólicamente los diferentes hechos que observamos acerca de sumas y productos con números pares e impares.

Puesto que la suma y la multiplicación son conmutativas, cada cuadro debería tener 3 anotaciones en vez de 4. La anotación encerrada en círculo es superflua en ambos cuadros.

CUADRO I

+	par	impar
par	par	impar
impar	impar	par

CUADRO II

×	par	impar
par	par	par
impar	par	impar

Grupo de ejercicios 1

1. *a*) Escriba el conjunto de números pares mayores que 10 y menores que 30.
   b) Escriba el conjunto de números impares mayores que 81 y menores que 87.

2. *a*) ¿Cuáles de los siguientes números son múltiplos de 2? 11, 29, 402, 1001.
   b) ¿Cuáles de los números mencionados en *a*) son impares?

3. Exprese cada uno de los siguientes números pares en la forma $(2 \times n)$.

   a) 36   *c*) 328
   b) 142   *d*) 1 000

4. Exprese cada uno de los siguientes números impares en la forma $(2 \times n) + 1$.

   a) 17   *c*) 121
   b) 39   *d*) 1 363

5. ¿Cuáles de los siguientes números son divisibles entre 2?, ¿entre 3?, ¿entre 5?

a) 8
b) 12
c) 25
d) 30
e) 49

6. Cuando un número entero se divide entre tres, el residuo es 0, 1, ó 2. Si A, B, y C son los conjuntos de números enteros cuyos residuos después de dividirse entre 3, son 0, 1 y 2, respectivamente; entonces los primeros cuatro miembros de A son 0, 3, 6 y 9.

   a) ¿Cuáles son los 4 primeros miembros de B?
   b) ¿Cuáles son los 4 primeros miembros de C?
   c) ¿Los conjuntos A, B y C son disjuntos?
   d) ¿Es $A \cup B \cup C = W$ (el conjunto de números enteros)?
   e) Con ejemplos numéricos compruebe que la suma de un miembro de B y un miembro de C es miembro de A.

7. Demuestre que la suma de un número par y un número impar es un número impar; donde $(2 \times n)$ es el número par y $(2 \times k) + 1$ es el impar.

8. Demuestre que la suma de dos números impares cualesquiera es un número par.

9. Demuestre que el producto de cualquier número por cualquier impar es un número par.

FACTORES Y MULTIPLOS

Los *múltiplos* de un número natural se obtienen multiplicando éste por 1, 2, 3, 4, etcétera. Expresar los múltiplos de un número natural en orden creciente es lo mismo que "contar de tal en tal número" —como contar de dos en dos o de tres en tres, etcétera.

Entonces, los múltiplos de 3 son:

$$3, 6, 9, 12, \ldots;$$

y los múltiplos de 7 son:

$$7, 14, 21, 28, \ldots.$$

En general,

> *Si* n *y* k *son números naturales entonces* $(k \times n)$ *se llama múltiplo de* n.

La expresión "5×6" es una representación del número 30. Se dice que los números 5 y 6 son *factores* del número 30. Decir que 5 es factor de 30 es lo mismo que decir que 30 es múltiplo de 5. ¿2 es factor de 30? Sí, porque 30 es el producto de 15×2, y por tanto es un múltiplo de 2. Los números 1, 3, 10, 15, y 30 son también factores de 30.

¿Cuáles son los factores de 25? Los números 2, 3 y 4 no lo son, puesto que 25 no es múltiplo de ninguno de ellos; pero 5 sí es factor, puesto que $5\times 5=25$. Los otros factores de 25 son 1 y 25 nada más. Note que cualquier número natural tiene como factores al mismo y a la unidad. Concentraremos nuestra atención, por supuesto, en los factores que son números naturales.

La definición de factor se puede formalizar como sigue:

> *Un número natural,* f, *se llama factor de un número natural,* n, *si* n *es múltiplo de* f, *es decir, si* n, *es divisible entre* f.

Examinar la lista de factores de un número natural nos facilita expresarlo como producto de sus factores en distintas formas. El número 12 tiene los siguientes factores: 1, 2, 3, 4, 6, 12. De la lista se pueden formar varios productos, sin que se tome siempre el mismo número de factores. Las expresiones siguientes son productos que representan a 12:

$$\begin{array}{l} 1\times 12 \\ 2\times 6 \\ 3\times 4 \\ 1\times 2\times 6 \\ 1\times 3\times 4 \\ 2\times 2\times 3 \\ 1\times 2\times 2\times 3. \end{array}$$

De hecho, esta lista contiene todas las factorizaciones que son esencialmente diferentes excepto, por supuesto, el factor que puede repetirse cuantas veces se quiera.

Para estar seguros se pueden obtener otras expresiones disponiendo en distinta forma los factores de las expresiones dadas. Por ejemplo, los factores de la expresión $1\times 3\times 4$ pueden disponerse así: $1\times 4\times 3$, ó $3\times 1\times 4$, ó $4\times 3\times 1$; todas estas expresiones son esencialmente la misma, sin embargo, en el sentido de que cada una tiene el mismo conjunto de factores.

Es interesante observar que para escribir todas las expresiones de productos posibles representativas de algún número natural, que tengan dos factores, sólo es necesario hacer una lista de los factores del número en orden creciente y entonces aparear el primero con el último, el segundo con el penúltimo y así sucesivamente. Para ejemplificar esto, encontremos todos los productos posibles de dos factores del número 105. Los factores de 105 dispuestos en orden creciente y los apareamientos de factores se muestran en la figura 1.

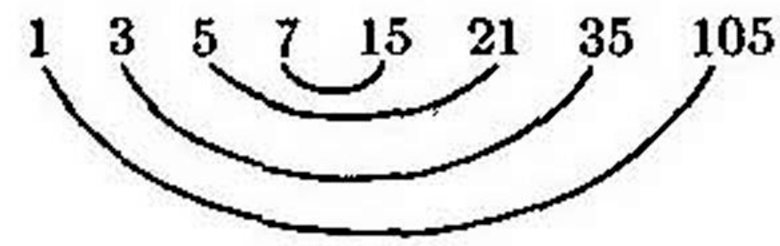


FIGURA 1

Los productos buscados de 105 son

$$1\times 105, \quad 3\times 35, \quad 5\times 21, \quad 7\times 15.$$

Grupo de ejercicios 2

1. Haga una lista de todos los factores de los siguientes números.

   a) 14 *b*) 19 *c*) 42 *d*) 36 *e*) 16

2. Escriba tres productos esencialmente diferentes de cada uno de los siguientes números.

   a) 18 *b*) 24 *c*) 50 *d*) 27

3. Encuentre todos los posibles productos de dos factores de cada uno de los siguientes números.

   a) 8 *b*) 18 *c*) 100

NUMEROS PRIMOS Y NUMEROS COMPUESTOS

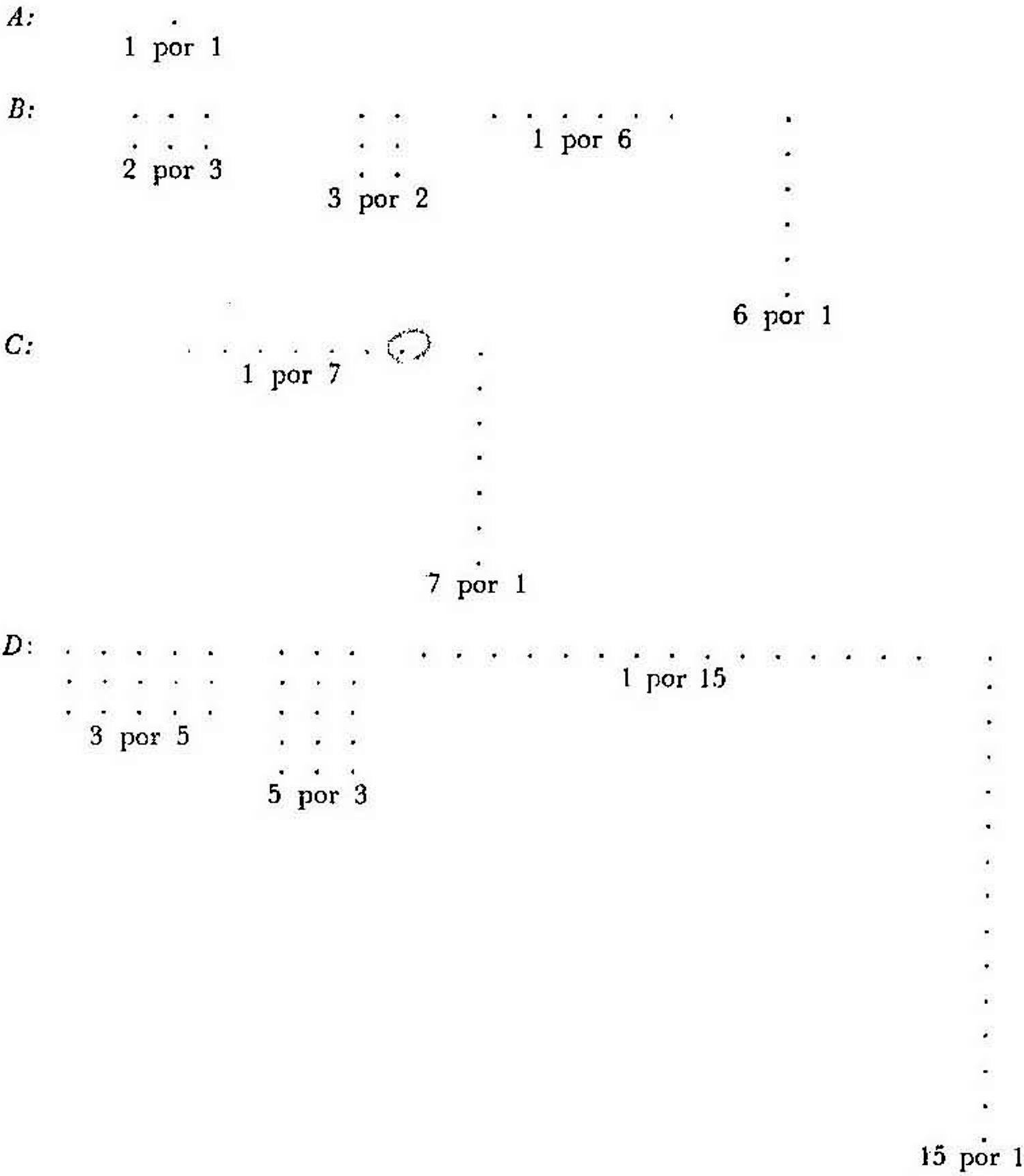
Hemos visto que un número entero es par o es impar, pero nunca ambos. En otras palabras, el conjunto de los números pares y el conjunto de los números impares son disjuntos y su unión es el conjunto de todos los números enteros, W.

Ahora analicemos la descomposición de W en cuatro conjuntos disjuntos. Uno de esos conjuntos tendrá a 1 como su único miembro y otro conjunto tendrá a 0 también como único miembro. Para describir los otros dos conjuntos es necesario dar algunas definiciones.

Primero consideremos estos conjuntos:

$A = \{x\}$ $B = \{x\,x\,x\,x\,x\,x\}$ $C = \{x\,x\,x\,x\,x\,x\,x\}$
$D = \{x\,x\,x\,x\,x\,x\,x\,x\,x\,x\,x\,x\,x\,x\,x\}$ $E = \{x\,x\,x\,x\,x\,x\,x\,x\,x\,x\,x\}$

Deseamos acomodar los elementos de cada conjunto en hileras con el mismo número de elementos en cada una. ¿Cuántos modos hay de hacerlo?



E: . . . .

1 por 11

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

11 por 1

¿Qué le sugieren estos arreglos acerca del conjunto de factores de cada uno de los números asociados con estos conjuntos?

Recuerde que todo número natural mayor que 1 tiene como factores al 1 y a sí mismo. El número 7 sólo tiene como factores 7 y 1, mientras que el número 15 además de 1 y 15 tiene otros dos factores que son 3 y 5. En el párrafo anterior vimos que para el conjunto *C* asociado a 7, 7 por 1 y 1 por 7 fueron los únicos arreglos posibles. Mientras que para el conjunto *D* asociado a 15 se obtuvieron otros arreglos diferentes de 1 por 15 y de 15 por 1.

Estamos especialmente interesados en los números naturales que sólo tienen dos factores, 1 y el número de que se trate. Los números 2, 5, 11 y 19 son de esa especie y los llamamos *números primos* o simplemente *primos*. Los números 6, 10 y 25 no son primos, porque $6=2\times3$, $10=2\times5$ y $25=5\times5$. Un número primo se define entonces como *los números naturales mayores que 1, que sólo tienen como factores a 1 y a sí mismos.* Insistimos en que si bien el único factor de 1 es 1, según la definición anterior, 1 no es primo.

Los números naturales mayores que 1 y que no son primos se llaman *números compuestos.* Éstos son números como 6 y 25 que tienen otros factores además de 1 y de sí mismos.

Se les dice compuestos en el sentido de que están "compuestos" o "formados" por números primos como factores.

$$6=2\times3$$
$$25=5\times5$$

Con los números primos 2 y 3 empleados como factores formamos el número 6. Con el número 5 empleado como factor doble obtenemos el número 25.

El conjunto de los números enteros, por tanto, es la unión de los cuatro siguientes conjuntos disjuntos:

1. El conjunto que tiene a 0 como su único miembro.
2. El conjunto que tiene a 1 como su único miembro.
3. El conjunto de los números primos.
4. El conjunto de los números compuestos.

La criba de Eratóstenes

En la figura 2 se ve una forma de determinar los números primos comprendidos entre los números naturales del 1 al 50 inclusive. El modelo, toma el nombre de criba del matemático griego Eratóstenes.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

FIGURA 2

El procedimiento consiste en tachar todos los números que no sean primos. El número 1 no es primo, por tanto, lo tachamos. El siguiente número que encontramos es el primo 2. Todos los números mayores que dos y múltiplos del mismo, esto es, que tienen a 2 como factor, se tachan. Continuamos el proceso y el siguiente número que encontramos es el primo 3; tachamos todos los números que sean divisibles entre 3 –algunos ya los tachamos desde la primera vez. Éstos son múltiplos de 3. El siguiente primo que aparece es el número 5; tachamos todos los números mayores que 5 que sean divisibles entre éste –vemos que ya se tacharon todos, excepto 25 y 35. Sigue el primo 7; todos los números mayores que 7 y divisibles entre éste se tachan (49 es el único múltiplo de 7 que no se ha tachado). Los números sobrantes 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 y 47 son los números primos entre 1 y 50.

Podemos ver la razón por la que suspendemos el proceso en el número 7. ¿Por qué no lo repetimos con el 11 que es el siguiente número primo? La razón es ésta: cualquier número compuesto menor o igual que 50 que tiene a 11 como factor, debe tener un factor primo menor que 11. ¿Por qué? Porque el citado número compuesto estaba tachado cuando se empleó el primo menor.

Grupo de ejercicios 3

1. Forme una criba como la de la figura 2, que comprenda los números naturales del 1 al 100 inclusive.

2. Explique por qué 2 es el único número par primo.

3. El número 385 es producto de tres factores primos. ¿Cuáles son?

4. ¿Por qué es imposible que la suma de dos primos impares sea otro número primo?

PRUEBAS DE DIVISIBILIDAD

¿Es 1 071 divisible entre 9? La pregunta se puede contestar dividiendo 1 071 entre 9, usando el algoritmo de la división.

$$
\begin{array}{r}
119 \\
9\,\overline{)\,1071} \\
\underline{900} \\
171 \\
\underline{90} \\
81 \\
\underline{81} \\
0
\end{array}
\longrightarrow
$$

Puesto que el residuo es 0, 1 071 es divisible entre 9.

Como cabe que sea tediosa una división larga, el empleo de pruebas de divisibilidad entre ciertos números naturales puede convenir, como un sustituto de la división larga.

Las pruebas de divisibilidad que aquí se presentan dependen directamente de nuestro sistema de notación de base 10. Por otra parte, la respuesta a la pregunta: "¿27 es divisible entre 9?", no depende del sistema de numeración empleado. La respuesta es "sí", si los números 27 y 9 se representan por los numerales 27_{diez} y 9_{diez} en el sistema de base 10, o mediante los numerales 102_{cinco} y 14_{cinco} en el sistema de base 5, o por numerales de cualquier sistema posicional. Las pruebas de divisibilidad se aplican a numerales, por eso dependen del sistema de numeración empleado.

La justificación de estas pruebas —o sea la razón por la que funcionan— depende de un hecho básico concerniente a la divisibilidad de una suma de dos números entre un número. Suponga que preguntamos "¿el número representado por $24+60$ es divisible entre 6?" La respuesta es "sí"; y nuestro razonamiento es como sigue:

$$\begin{aligned} 24+60 &= (6\times 4)+(6\times 10) \\ &= 6\times(4+10) \qquad \text{(Propiedad distributiva)} \end{aligned}$$

Entonces $24+60$ es divisible entre 6, porque 24 y 60 son ambos divisibles entre 6.

¿La suma de $(35+19)$ es divisible entre 5?

La respuesta sería sí, suponiendo que hubiera un número natural n tal que $19=5\times n$. Entonces podríamos escribir:

$$\begin{aligned} 35+19 &= (5\times 7)+(5\times n) \\ &= 5\times(7+n), \end{aligned}$$

y $(35+19)$ sería múltiplo de 5. Sin embargo, no hay número natural n, tal que $5\times n$ sea igual a 19. Por tanto, $(35+19)$ no es divisible entre 5.

Considere dos ejemplos más:

$11+18$ no es divisible entre 3; $(29\div 3$ no es número entero$)$.
$14+35$ es divisible entre 7; $(49\div 7=7)$.

En el primer ejemplo, uno de los sumandos es divisible entre 3, el otro no lo es, y la suma tampoco. En el segundo ejemplo, cada sumando es divisible entre 7 y la suma de los sumandos es también divisible entre 7.

Lo que observamos en estos ejemplos se puede enunciar como sigue: si en la suma de dos sumandos uno de ellos es divisible entre un número c, entonces la suma es divisible entre c si, y sólo si, el otro sumando de la suma también es divisible entre c. Esto se explica mejor empleando literales.

Si a es divisible entre c, entonces, $a+b$ es divisible entre c si, y sólo si, b es divisible entre c.*

Por conveniencia llamaremos a esto *propiedad de divisibilidad de la suma.*

* Note que se requiere que a sea divisible entre c. Si tanto a como b no son divisibles entre c, no podemos sacar conclusiones acerca de si la suma $a+b$ es divisible entre c. Por ejemplo: $5+23$ es divisible entre 4, aunque ni 5 ni 23 son divisibles entre 4.

Divisibilidad entre 2, 5, 10

Antes definimos los números pares como números enteros divisibles entre 2. Fácilmente se reconocen los numerales que representan números pares. (En esta sección, se entiende que los numerales son de base 10.) Es un hecho conocido que el último dígito del numeral nos indique si el número es o no divisible entre 2. *Un número es divisible entre 2, si el último dígito de su numeral es 0, 2, 4, 6 u 8; en cualquier otro caso el número no es divisible entre 2.* Aunque esta es una prueba sencilla, es útil examinar sus bases. Puesto que $10=2\times5$, 10 es divisible entre 2 de igual modo 10×10 ó 10^2 también es divisible entre 2, porque

$$\begin{aligned}10\times10&=(2\times5)\times10\\&=2\times(5\times10)\\&=2\times50.\end{aligned}$$

De la misma manera se puede demostrar que 1 000 (ó 10^3) es divisible entre 2, puesto que $1\,000=2\times(5\times10^2)$. También 10 000 (ó 10^4) es igual a $2\times(5\times10^3)$ y por tanto, es divisible entre 2. Cualquier múltiplo o potencia de 10 es divisible entre 2, como

$$10\,000(\text{ó } 10^4)=2\times(5\times10^3),$$

se sigue que

$$\begin{aligned}70\,000&=10\,000\times7\\&=2\times(5\times10^3)\times7\\&=2\times(35\times10^3)\end{aligned}$$

es divisible entre 2.

Ahora considere el número 7 918, que puede expresarse como

$$(7\,000+900+10)+8,$$

que es la suma de dos sumandos. La propiedad de la divisibilidad de la suma nos dice que el primer sumando, es $7\,000+900+10$, es divisible entre 2, porque 7 000, 900 y 10 son divisibles entre 2. Además, como el segundo sumando 8 es también divisible entre 2 se sigue de la misma propiedad que 7 918 es divisible entre 2.

La divisibilidad entre 10 y 5 se justifica de una manera semejante. Los enunciados de estas pruebas de divisibilidad son los que siguen:

Un número es divisible entre 10 si, y sólo si, el último dígito de su numeral es 0.
Un número es divisible entre 5 si, y sólo si, el último número de su numeral es 0 ó 5.

Divisibilidad entre 3 y 9

Para probar si un número es divisible entre 2, 10 ó 5, necesitamos sólo mirar el último dígito de su numeral. En el caso del número tres, las cosas no son tan fáciles. Examine las siguientes columnas de numerales:

10	30
31	21
52	42
13	63
334	24
25	45
106	66
17	117
28	78
149	459

Ninguno de los números representados en la primera columna es divisible entre 3, a pesar de que todos los dígitos posibles aparecen como último dígito del numeral. En la segunda columna todos los números son divisibles entre 3 y de nuevo todos los dígitos posibles aparecen como último dígito del numeral. Por tanto, el último dígito de un numeral no tiene que ver —cuando se considera en sí mismo— con la divisibilidad de un número entre 3.

Las dos columnas de números del párrafo anterior, se ofrecen de nuevo en el cuadro III; y se muestra la suma de los dígitos de cada numeral en otra columna por separado.

CUADRO III

Numeral	*Suma de dígitos*	*Numeral*	*Suma de dígitos*
10	$1+0=1$	30	$3+0=3$
31	$3+1=4$	21	$2+1=3$
52	$5+2=7$	42	$4+2=6$
13	$1+3=4$	63	$6+3=9$
334	$3+3+4=10$	24	$2+4=6$
25	$2+5=7$	45	$4+5=9$
106	$1+0+6=7$	66	$6+6=12$
17	$1+7=8$	117	$1+1+7=9$
28	$2+8=10$	78	$7+8=15$
149	$1+4+9=14$	459	$4+5+9=18$

Nota: Cuando se habla de la suma de los dígitos de un numeral, nos referimos a los dígitos como números, no como símbolos. Entonces, la suma de los dígitos del numeral 256 es $(2+5+6)$ o sea 13.

Cada numeral de la primera columna representa un número que no es divisible entre 3, y la suma de los dígitos del numeral tampoco es divisible entre 3. Cada numeral de la tercera columna representa un número que sí es divisible entre 3, y la suma de sus dígitos también es divisible entre 3. La verdad del siguiente enunciado nos parece posible:

> *Un número es divisible entre 3 si la suma de los dígitos de su numeral de base diez es divisible entre 3, de lo contrario no es divisible entre esa cantidad.*

De acuerdo con esta prueba de divisibilidad el número 7 284 es divisible entre 3, puesto que $7+2+8+4$, o sea 21, es divisible entre 3; pero 18 514 no es divisible entre 3, toda vez que $1+8+5+1+4$ es 19, que no es divisible entre 3.

Veamos cómo trabaja esta prueba, empleando 528 como ejemplo:

$$\begin{aligned}528 &= (5\times 100) + (2\times 10) + 8\\ &= [5\times(99+1)] + [2\times(9+1)] + 8 \qquad (100=99+1;\ 10=9+1)\\ &= [(5\times 99) + (5\times 1)] + [(2\times 9) + (2\times 1)] + 8 \qquad \text{(Propiedad distributiva)}\\ &= [(5\times 99) + (2\times 9)] + (5+2+8) \qquad \text{(Propiedad asociativa y conmutativa de la suma)}\end{aligned}$$

Cada uno de los números 2×9 y 5×99, es divisible entre 3, porque:

$$2\times 9 = 2\times(3\times 3) = (2\times 3)\times 3$$
$$5\times 99 = 5\times(33\times 3) = (5\times 33)\times 3.$$

Por tanto, el número $(5\times 99)+(2\times 9)$, es divisible entre 3, por la propiedad de la divisibilidad de la suma. Ahora bien, 528 es la suma de $(5\times 99) + (2\times 9)$ y $5+2+8$ es la suma de los dígitos del numeral 528. Aplicando la propiedad de divisibilidad de la suma, vemos de nuevo que 528 es divisible entre 3, porque $5+2+8$, o sea 15, es divisible entre 3.

Como segundo ejemplo, consideremos el número 2 173.

$$2\,173 = [2\times(999+1)] + [1\times(99+1)] + [7\times(9+1)] + 3.$$

Empleando el mismo procedimiento que en el primer ejemplo, podemos demostrar que

$$2\,173 = [(2\times 999) + (1\times 99) + (7\times 9)] + (2+1+7+3).$$

El número $[(2\times999)+(1\times99)+(7\times9)]$ es divisible entre 3; pero la suma de sus dígitos, $2+1+7+3$ o sea 13 no es divisible entre 3, y por tanto, tampoco lo es 2 173.

La prueba de divisibilidad entre nueve es muy semejante a la prueba de divisibilidad entre 3. En el primer ejemplo anterior, 528 lo expresamos así:

$$528=[(5\times99)+(2\times9)]+(5+2+8).$$

Ahora,

(5×99) es divisible entre 9 puesto que $5\times99=5\times(11\times9)$
$=(5\times11)\times9;$

y

(2×9) también es divisible entre 9.

En consecuencia

$[(5\times99)+(2\times9)]$ es divisible entre 9. (Propiedad de la divisibilidad de la suma.)

Entonces,

$[(5\times99)+(2\times9)]+(5+2+8)$ es divisible entre 9 si, y sólo si, $(5+2+8)$ es divisible entre 9.

Por supuesto,

$5+2+8=15$, que no es divisible entre 9 y, por tanto, 528 tampoco lo es.

Un número es divisible entre 9 si, y sólo si, la suma de los dígitos de su numeral de base 10 es divisible entre 9.

(Es interesante observar que en los numerales de los primeros diez múltiplos de 9:

9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90,

la suma de sus dígitos es en cada caso 9.) ¿El número 218 462 es divisible entre 9? La suma de sus dígitos, $2+1+8+4+6+2$ es 23. Puesto que $2+3=5$, 23 no es divisible entre 9, y por tanto, tampoco lo es 218 462.

Vale la pena observar que si un número natural, n, es divisible entre un número natural d, entonces es divisible entre cualquier factor de d. Por ejemplo, si n es divisible entre 6, entonces es también divisible entre 2 y entre 3.

Para ayudar a convencernos de que el enunciado anterior es verdadero, tomemos 516 como n. El producto 6×86 representa a 516. El producto 6×86 se puede escribir $2\times3\times86$ y también

$$2\times(3\times86) \text{ ó } 3\times(2\times86).$$

Estas dos últimas expresiones muestran que 516 es divisible entre 2 y también entre 3. De igual modo, si un número es divisible entre 15, también es divisible entre 3 y entre 5. Puesto que 2 400 es divisible entre 24, también es divisible entre los siguientes factores de 24:

2, 3, 4, 6, 12.

Grupo de ejercicios 4

1. De los números 415, 283, 2 544, 1 000 011, 246 312, ¿cuáles son divisibles entre los siguientes?

   a) 2 *b*) 3 *c*) 5 *d*) 9

2. De los siguientes números, ¿cuáles son divisibles entre 7?

   a) $(7\times9\,167)+12$
   b) $(7\times48)+(7\times13)$
   c) $(7\times6\times5)+1$
   d) $(7\times1\,000)+(7\times200)+14$

3. ¿Cuál es el residuo cuando el número $(2\times3\times5)+1$, o sea 31 se divide entre cada uno de los siguientes números?

   a) 2 *b*) 3 *c*) 5

4. Encuentre el menor número que tenga residuo 1 cuando se divide entre cualquiera de los números 3, 5 y 7.

Pruebas de divisibilidad en otros sistemas de numeración

Las pruebas de divisibilidad desarrolladas en la sección anterior dependen directamente del sistema de numeración que se emplea, llamado sistema decimal de notación posicional. Note en las proposiciones de dichas pruebas que las palabras *dígito* y *numeral* desempeñan un oficio esencial. La dependencia de las pruebas de divisibilidad del sistema de numeración adoptado se nota aún más cuando se aplican a numerales de otros sistemas de posición de bases diferentes de 10.

Los sistemas posicionales de bases 5, 6, 12 se emplearán en el cuadro IV —lea de derecha a izquierda—; recuerde los valores posicionales asignados a las cuatro primeras posiciones del numeral en sistemas de base 5, 6 y 12. (Vea el cuaderno 3: *Sistemas de numeración para los números enteros*).

CUADRO IV

Valor posicional				*Base*
cinco^3	cinco^2	cinco^1	cinco^0 ó uno	cinco
seis^3	seis^2	seis^1	seis^0 ó uno	seis
doce^3	doce^2	doce^1	doce^0 ó uno	doce

Los numerales de los números naturales del 1 al 20 en sistemas de base 10, 5, 6 y 12 aparecen en el cuadro V.

CUADRO V

Número	*Numeral de base diez*	*Numeral de base cinco*	*Numeral de base seis*	*Numeral de base doce*
Uno	1	1	1	1
Dos	2	2	2	2
Tres	3	3	3	3
Cuatro	4	4	4	4
Cinco	5	10	5	5
Seis	6	11	10	6
Siete	7	12	11	7
Ocho	8	13	12	8
Nueve	9	14	13	9
Diez	10	20	14	T
Once	11	21	15	E
Doce	12	22	20	10

CUADRO V. (Conclusión)

Número	*Numeral de base diez*	*Numeral de base cinco*	*Numeral de base seis*	*Numeral de base doce*
Trece	13	23	21	11
Catorce	14	24	22	12
Quince	15	30	23	13
Dieciséis	16	31	24	14
Diecisiete	17	32	25	15
Dieciocho	18	33	30	16
Diecinueve	19	34	31	17
Veinte	20	40	32	18

Si examinamos el cuadro V haremos las siguientes observaciones:

1. Un numeral de base 6 representa a un número par —o número divisible entre 2— si, y sólo si, el último dígito del numeral representa un número par. Lo mismo se puede decir de los numerales de base 12 y base 10. La divisibilidad entre 2 en sistemas de base seis y doce se prueba de la misma manera que en el sistema de base 10; esto es, cuando el último dígito del numeral representa un número par.
2. La prueba de divisibilidad entre 2 en el sistema de base 5, no es igual. Los numerales 13_{cinco} y 22_{cinco} son números pares que representan al ocho y al doce; el último dígito en el primer numeral representa un número impar y el último dígito del otro numeral representa un número par. En el grupo de ejercicios 5 se sugiere una prueba de divisibilidad entre 2 para el sistema de base 5. Encontraremos que difiere bastante de la que aplicamos en nuestro sistema de base diez.
3. La prueba de divisibilidad entre 3, en el sistema base diez, que implica la suma de dígitos del numeral, no se puede emplear para probar la divisibilidad entre 3 en los sistemas de base cinco, seis y doce. Los numerales que representan al doce, por ejemplo, son

$$22_{\text{cinco}}, \quad 20_{\text{seis}}, \quad \text{y} \quad 10_{\text{doce}}.$$

Doce es divisible entre 3, pero en ninguno de estos tres numerales, la suma de sus dígitos es divisible entre 3.

No nos proponemos aquí, el desarrollo sistemático de las pruebas de divisibilidad de estos diferentes sistemas posicionales. Sin embargo, se discuten por la ventaja que en la práctica esto significa, algunas de las pruebas más sencillas.

En el sistema de base doce la divisibilidad de un número entre 2, 3, 4 ó 6 se prueba observando el último dígito del numeral, si es divisible entre 2, el número representado por este dígito, el número original es divisible entre 2, y no lo es, en caso contrario.

Si el número representado por este dígito es divisible entre 3, entonces el número original es divisible entre 3, y no lo es, en caso contrario. De la misma manera se prueba la divisibilidad entre 4 y 6. Estas pruebas tienen como fundamento que los números 2, 3, 4 y 6 son factores de doce.

¿El número 698_{doce} es divisible entre 4?

$$698_{\text{doce}} = (6 \times \text{doce}^2) + (9 \times \text{doce}) + 8$$

El número $(9 \times \text{doce})$ es divisible entre 4 lo mismo que $(6 \times \text{doce}^2)$. Por tanto $[(6 \times \text{doce}^2) + (9 \times \text{doce})]$ es divisible entre 4 y puesto que 8 también es divisible entre 4, el número 698_{doce} es divisible entre 4.

¿El número $T7_{\text{doce}}$, es divisible entre 3?

$$T7_{\text{doce}} = (\text{diez} \times \text{doce}) + 7$$

En este caso $(\text{diez} \times \text{doce})$ es divisible entre 3, no así el 7, y por eso tampoco $T7_{\text{doce}}$ es divisible entre 3.

En el sistema de base seis hay una prueba de divisibilidad entre 5 que es enteramente parecida a la prueba de divisibilidad entre 9 de nuestro sistema de base diez. El cuadro VI nos ofrece los numerales de base seis para 7 números, cada uno de los cuales es divisible entre 5. ¿Qué observamos respecto a la suma de los dígitos * de cada numeral? En cada uno de los casos la suma es divisible entre 5. Se puede demostrar que un número es divisible entre 5 si, y sólo si, es divisible entre 5 la suma de los dígitos de su numeral de base seis.

* Aquí la palabra "dígitos" se emplea en lugar de la frase "números representados por los dígitos".

CUADRO VI

Número	*Numeral de base seis*
Quince	23
Veinte	32
Treinta y cinco	55
Cuarenta	104
Sesenta y cinco	145
Cien	244
Ciento cincuenta y cinco	415

Grupo de ejercicios 5

1. Examine los numerales de base cinco que representan los números pares del dos al veinte (vea cuadro V, pág. 27). Obtenga la suma de los dígitos de cada numeral. Haga lo mismo con los numerales que representan a los números impares del uno al diecinueve. ¿Podemos encontrar una prueba de divisibilidad entre dos para el sistema de base cinco?
2. Hemos visto que un número es divisible entre nueve, si la suma de los dígitos de su numeral de base diez es divisible entre nueve, y que un número es divisible entre cinco, si la suma de los dígitos de su numeral de base seis es divisible entre cinco. Deduzca una prueba de divisibilidad entre cuatro para el sistema de base cinco. Vea si su prueba funciona aplicándola a los numerales de base cinco que representan a los siguientes números:

   cuatro, ocho, doce, dieciséis, veinte, cincuenta y dos (202_{cinco}), veinticuatro (44_{cinco}), ciento ochenta y cuatro ($1\,214_{\text{cinco}}$), nueve, once, diecisiete.

3. Hay una prueba de divisibilidad para el sistema de numeración de base doce, semejante a las pruebas del ejercicio 2. Verifique la prueba con los siguientes numerales. ¿Qué número es el de esta prueba?

   29_{doce} (representa treinta y tres)
   38_{doce} (representa cuarenta y cuatro)
   40_{doce} (representa cuarenta y ocho)
   146_{doce} (representa ciento noventa y ocho).

REPRESENTACION DE UN NUMERO COMO PRODUCTO DE NUMEROS PRIMOS

Recordemos que un número natural mayor que 1 es número primo o es número compuesto. Un primo puede expresarse como producto de números naturales de una sola manera; esto es, como producto de sí mismo por uno (aquí se supone que el número 1 aparece una sola vez como factor). Un número compuesto puede expresarse por varios productos. Por ejemplo, el número 15 puede expresarse como (3×5) o también como (1×15).

Los números 3 y 5, según sabemos, se llaman factores de 15, y el producto 3×5 se llama *forma factorizada* de 15. De ahora en adelante no nos interesaremos en lo general en las formas factorizadas tales como 1×15, que incluye a 1 como factor. En otras palabras, cuando hablamos de representar un número en forma factorizada, indicamos que queremos expresarlo como producto de números naturales mayores que 1. Las siguientes expresiones son formas factorizadas o factorizaciones del número 12: 2×6, 3×4, $2\times2\times3$. Algunas veces hablamos de *factorizar* un número. Esto es lo mismo que expresarlo como producto de números naturales mayores que 1.

De los diferentes productos o factorizaciones del número 12, especialmente atendamos a la expresión

$$2\times2\times3.$$

que expresa 12 como producto de números primos, suele llamarse *factorización en primos*, en este caso, de 12.

¿Cuál de las siguientes expresiones de 18 indica un producto de primos?

$$3\times6 \qquad 2\times9 \qquad 2\times3\times3$$

¿Estamos de acuerdo en que es $2\times3\times3$? En la expresión 3×6, el número 6 no es primo; en la expresión 2×9, el número 9 no es primo.

La proposición "factorizar un número en sus factores primos" significa "expresar un número como producto de primos". Entonces, cuando expresamos 15 como 3×5 factorizamos 15 en sus factores primos. Factorizar 12 en sus factores primos significa expresarlo como $2\times2\times3$.

¿Todo número compuesto puede factorizarse mediante factores primos? Esto es, ¿se puede expresar como producto de primos? El siguiente argumento aclara que la respuesta es sí.

> Todo número compuesto puede factorizarse; esto es, puede representarse como producto de factores * cada uno de los

* Por "factores", como ya se vio (págs. 14 y 15), queremos decir factores que son números naturales mayores que uno.

cuales es menor que el número original. Si uno (o más) de estos factores es compuesto, podrá expresarse como producto de factores más pequeños aún. No puede proseguirse indefinidamente este proceso porque los factores cada vez se reducen más. Así llegaremos por fin a un producto que ya no permita seguir factorizando. Cuando llegamos a este producto, todos los factores son primos. Por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
120 &= 8\times 15 \quad &&\text{(8 y 15 son compuestos.)}\\
&= 8\times 3\times 5 &&\text{(8 es compuesto.)}\\
&= 2\times 4\times 3\times 5 &&\text{(4 es compuesto.)}\\
&= 2\times 2\times 2\times 3\times 5 &&\text{(Todos los factores son primos.)}
\end{aligned}
$$

El ejemplo anterior ilustra el proceso de factorización repetida que termina cuando todos los factores son primos.

Sabemos que todo número compuesto puede factorizarse en primos; investiguemos algunos modos por los que esto se efectúa.

Con el número 84, como ejemplo, escribamos un producto de ese número, que nos conste que es correcto:

$84=6\times 14$ (Podríamos haber empezado con 4×21.)

Sabemos que $6=2\times 3$ y que $14=2\times 7$. Entonces, 6×14 puede expresarse, $2\times 3\times 2\times 7$, que es un producto de factores primos solamente. El proceso anterior se expresa a continuación en forma conveniente:

```
  6×14
 /\  |\
  /\
  6×14
 /\  |\
2×3×2×7
```

$84=2\times 3\times 2\times 7$

La disposición de la izquierda forma lo que algunas veces se llama *arborescente de factores.*

Si en vez de 6×14 empezamos 4×21, resultará un esquema distinto,

```
    84
    /\
   4×21
  /\  |\
 2×2×3×7
```

$84=2\times 2\times 3\times 7.$

Podríamos haber empezado también con 7×12:

$$\begin{gathered} 84 \\ 7\times 12 \\ 7\times 3\times 4 \\ 7\times 3\times 2\times 2 \end{gathered}$$

$$84=7\times 3\times 2\times 2.$$

Note que los 3 productos $2\times 3\times 2\times 7$, $2\times 2\times 3\times 7$ y $7\times 3\times 2\times 2$, que proceden del empleo de tres distintos esquemas arborescentes de factores, son los mismos y sólo difieren en el orden de sus factores.

El método de factores arborescentes se ilustra en la figura 2.

$$\begin{gathered} 56 \\ 4\times 14 \\ 2\times 2\times 2\times 7 \end{gathered}$$

$$56=2\times 2\times 2\times 7$$

$$\begin{gathered} 98 \\ 2\times 49 \\ 2\times 7\times 7 \end{gathered}$$

$$98=2\times 7\times 7$$

$$\begin{gathered} 960 \\ 10\times 96 \\ 2\times 5\times 8\times 12 \\ 2\times 5\times 2\times 4\times 3\times 4 \\ 2\times 5\times 2\times 2\times 2\times 3\times 2\times 2 \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} 960 &= 2\times 5\times 2\times 2\times 2\times 3\times 2\times 2 \\ &= 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 3\times 5 \end{aligned}$$

FIGURA 2

Pueden emplearse exponentes para escribir productos en forma breve. En lugar de escribir $2\times 7\times 7\times 7$ podemos escribir 2×7^3, puesto que 7^3 significa $7\times 7\times 7$. El exponente 3 indica que 7 se emplea tres veces como factor. Las factorizaciones en primos de los ejemplos anteriores pueden escribirse como sigue:

$$\begin{aligned} 56 &= 2^3\times 7, \\ 98 &= 2\times 7^2, \\ 960 &= 2^6\times 3\times 5. \end{aligned}$$

Los ejemplos de esta sección señalan un hecho muy importante respecto a los números compuestos; hecho que puede expresarse como sigue:

> *Todo número compuesto puede expresarse como producto de un, y sólo un, conjunto de primos.* (Note, sin embargo, que aunque todo número compuesto puede expresarse únicamente por un conjunto de números primos puede variar el orden en que se escriben los factores primos.)

Y se llama *teorema fundamental de la aritmética* o *teorema de la factorización única.*

No se demostrará este teorema en el presente cuaderno. Encontraremos, sin embargo, que mientras más y más trabajemos con las factorizaciones en primos, la verdad de este teorema resulta cada vez más evidente. Vimos cuando iniciamos el proceso de factorización del número 84 la posibilidad de emplear tres diferentes formas y los productos resultantes fueron $2 \times 3 \times 2 \times 7$, $2 \times 2 \times 3 \times 7$, $7 \times 2 \times 3 \times 2$. Estas expresiones son iguales, excepto en el orden en que están escritos los factores primos.

El número 1, según recordamos, por definición no es primo. Si el 1 se incluyera entre los primos, no sería cierto el teorema fundamental de la arimética. El número 15, por ejemplo, tendría muy diferentes factorizaciones en primos, tales como 3×5, $1 \times 3 \times 5$, $1 \times 1 \times 3 \times 5$, $1 \times 1 \times 1 \times 3 \times 5$, y así sucesivamente.

Grupo de ejercicios 6

1. Exprese cada uno de los siguientes números como un producto de dos factores menores.

   a) 28 *b*) 36 *c*) 54 *d*) 75

2. Exprese cada uno de los números del ejercicio 1, como producto de primos, empleando un esquema arborescente. Empiece con el producto de los dos factores menores que obtuvo en el ejercicio 1.

3. Emplee una vez más el método del esquema arborescente en cada uno de los números del ejercicio 1. En este caso empiece con un par diferente de factores.

4. Obtenga la factorización en primos de cada uno de los siguientes números:

   a) 4 *b*) 8 *c*) 16 *d*) 27

5. Exprese 972 como producto de primos. (Sugerencia: $972=27\times36$.)

6. Exprese cada uno de los siguientes productos empleando exponentes.

   a) $2\times2\times11\times11$
   b) $3\times31\times31\times31\times31$
   c) $3\times3\times3\times7\times7\times19$

El método de primos consecutivos

Veamos de nuevo el procedimiento empleado para expresar un número compuesto como un producto de primos. Hasta ahora sólo hemos visto un método: empecemos con un par de factores que fácilmente podamos encontrar, factoricemos estos números, si es posible, y así sucesivamente hasta que sólo haya números primos en el producto. Este método en realidad es en muchos casos muy práctico. Sin embargo, no es tan fácil escoger algunas veces un producto inicial de factores con el que se empiece el proceso especialmente cuando el número que se va a factorizar es grande.

Hay un modo más sistemático de factorizar un número compuesto en factores primos. Ejemplifiquémoslo empleando otra vez el número 84. Empecemos con 2 que es el primo más pequeño, veamos si es o no factor de 84. Por una división —o mediante una inspección— vemos que

$$84=2\times42.$$

Ahora, 2 también es factor de 42, y $42=2\times21$. Esto significa que

$$84=2\times2\times21.$$

Pero, 2 no es factor de 21. Entonces continuemos con el siguiente primo, 3. ¿3 es factor de 21? Sí, $21=3\times7$. Por tanto,

$$\begin{aligned}84&=2\times2\times3\times7\\&=2^2\times3\times7.\end{aligned}$$

Todos los factores de esta expresión, son primos, lo cual significa que la operación está concluida.

Como segundo ejemplo expresemos el número 1 144 como producto de primos. De nuevo probemos con los primos consecutivos 2, 3, 5, 7 y así sucesivamente como posibles factores.

$1\,144=2\times572$ (2 es factor y $1\,144\div2=572$.)
$1\,144=2\times2\times286$ (2 es factor de 572 y $572\div2=286$.)
$1\,144=2\times2\times2\times143$ (2 es factor de 286 y $286\div2=143$.)

Ahora, 2 no es factor de 143 y tampoco el siguiente primo "3". Podemos comprobar esto mediante una división o aplicando la prueba de divisibilidad entre 3 $(1+4+3=8$, que no es divisible entre 3$)$. Los siguientes primos son 5 y 7, ninguno de éstos es factor de 143; el siguiente primo es 11, y $143 \div 11 = 13$. Por tanto, $143 = 11 \times 13$ y podemos escribir ahora

$$1\,144 = 2 \times 2 \times 2 \times 11 \times 13.$$

Puesto que 13 es primo, esta última expresión es el producto de primos deseado.

Por conveniencia llamamos al método empleado en los dos ejemplos anteriores, *método de primos consecutivos.* Para obtener la factorización en primos de un número.

Los resultados esenciales de nuestro trabajo en el ejemplo anterior se pueden ver resumidamente a continuación:

$$\begin{array}{r|r} 2 & 1144 \\ 2 & 572 \\ 2 & 286 \\ 11 & 143 \\ & 13 \end{array} \qquad 1144 = 2 \times 2 \times 2 \times 11 \times 13.$$

Esta forma no presenta todo el mecanismo de la operación. Por ejemplo, no muestra que probamos a 5 y 7 como posibles factores. De cualquier modo, la forma es muy útil cuando estamos familiarizados con este método.

En el siguiente ejemplo empleamos la forma abreviada para mostrar la descomposición en factores primos de 1 500

$$\begin{array}{r|rl} 2 & 1500 & \\ 2 & 750 & (2 \times 750 = 1500) \\ 3 & 375 & (2 \times 375 = 750) \\ 5 & 125 & (3 \times 125 = 375) \\ 5 & 25 & (5 \times 25 = 125) \\ & 5 & (5 \times 5 = 25) \qquad 1500 = 2^2 \times 3 \times 5^3 \end{array}$$

Aplicando las propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación todo producto de dos factores de un número se puede obtener de la factorización de éste en sus primos. Considere, por ejemplo, el número 110 cuya factorización en primos es

$$2 \times 5 \times 11.$$

El producto se puede escribir en cada una de las formas que siguen:

$$(2\times 5)\times 11 = 10\times 11,$$
$$(2\times 11)\times 5 = 22\times 5,$$
$$(5\times 11)\times 2 = 55\times 2.$$

Donde vemos que 110 es múltiplo de cada uno de los siguientes números: 2, 5, 10, 11, 22, 55. Estos números junto con 1 y 110 constituyen el conjunto de todos los factores de 110.

La factorización en primos la emplearemos después en la obtención del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo de dos o más números. La primera de estas aplicaciones conviene para encontrar la expresión más simple de un número racional; por ejemplo $\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$; y la segunda aplicación conviene para la suma de números racionales; por ejemplo

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{8}{12}+\frac{9}{12}=\frac{17}{12}$$

Grupo de ejercicios 7

1. En cada uno de los siguientes productos damos la factorización en primos. Encuentre el numeral de base diez correspondiente a cada número.

   Ejemplo: $2^2\times 3\times 5^3 = 4\times 3\times 125$
   $= 4\times 375$
   $= 1\,500$ (numeral de base diez)

   a) $2\times 2\times 2$
   b) 3×5
   c) $3\times 3\times 7$
   d) $2^4\times 5$ $(2^4 = 2\times 2\times 2\times 2)$
   e) 7^2
   f) $2\times 5\times 7\times 11$

2. Emplee el método de primos consecutivos para expresar cada uno de los siguientes números como producto de primos.

   a) 54
   b) 100
   c) 121
   d) 245
   e) 442
   f) 1 001

Determinación de primos

Supongamos que nos piden que demostremos si el número 67 es primo o es compuesto. Podríamos emplear la criba de Eratóstenes, pero eso no sería muy práctico. Lo mejor para ese caso consiste en probar como factores los primos consecutivos 2, 3, 5, 7, 11, etcétera. Pensamos que tendrían que probarse todos los primos menores que 67, antes de poder afirmar que 67 es primo –si acaso lo es. Se puede comprobar fácilmente que ninguno de los cuatro primeros primos, 2, 3, 5, 7 es factor de 67. ¿Habrá que probar el próximo primo 11, o cualquier primo mayor que 11? No; porque si 67 no es primo, entonces debe ser producto de cuando menos dos primos del conjunto de primos mayores que 7, {11, 13, 17, 19, ...}. Esto es imposible porque 67 es menor que cualquier producto de tales primos. Es menor que (11×11), por tanto, 67 es primo.

En general, para determinar si un número es primo o no, mediante la prueba de los primos 2, 3, 5, etcétera, como posibles factores de primos en orden de sucesión es innecesario probar cualquier primo cuya segunda potencia sea mayor que el número dado. Ningún número compuesto puede tener como menor factor primo un primo cuyo cuadrado sea mayor que ese número. Si tomamos 677 para ver si es primo y encontramos que ningún primo menor o igual a 23, es factor de ese número, no necesitamos probar ningún primo mayor que 23, porque la segunda potencia del siguiente primo 29 es mayor que 677; $29^2 = 29 \times 29 = 841$, $841 > 677$. El número 677 es, entonces, primo.

Ahora consideremos un ejemplo más en el que mostraremos el empleo de las pruebas de divisibilidad ya estudiadas en este cuaderno. ¿El número 299 es primo o es compuesto? Como 19^2 es mayor que 299, no necesitamos probar ningún primo mayor que 17 como posible factor. Probaremos los siguientes:

2, 3, 5, 11, 13, 17.

Primo	*¿Este primo es factor de 299? ¿Por qué? o ¿Por qué no?*
2	No; el último dígito en "299" es 9 que no es número par.
3	No; $2+9+9=20$, y 20 no es divisible entre 3.
5	No; el último dígito de 299 no es 0 ni es 5.
7	No; puesto que $299=(7\times 42)+5$, el residuo cuando se divide 299 entre 7 es 5 no 0.
11	No; $299=(11\times 27)+2$.
13	Sí; $299=13\times 23$.

Vemos que el número 299 es compuesto; es producto de los dos primos 13 y 23.

El conjunto de los números enteros como unión de conjuntos disjuntos

Ya dijimos que el conjunto de los números enteros es la unión de los cuatro siguientes conjuntos disjuntos:

1. El conjunto que tiene a 0 como único miembro.
2. El conjunto que tiene a 1 como único miembro.
3. El conjunto de los números primos.
4. El conjunto de los números compuestos.

Los números primos son los *componentes básicos* que forman los números compuestos. Cualquier número compuesto puede obtenerse formando un producto con los miembros del conjunto de los números primos, donde cualquier primo puede emplearse como factor cuantas veces se desee. Los números 0 y 1, por definición no son ni primos ni compuestos y se puede ver que en un producto el número 1 no sirve para este propósito como componente básico, puesto que

$$1\times3\times5 \text{ es el mismo número que } 3\times5,$$
$$1\times1\times1\times2^2\times7 \text{ es el mismo número que } 2^2\times7.$$

Con el número 0 es peor aún. No puede emplearse como factor de otro número que no sea 0. Cualquier producto que tenga 0 como factor representa 0.

Grupo de ejercicios 8

1. ¿Cuáles de los siguientes números son primos y cuáles compuestos?

a) 69	*d*) 101
b) 67	*e*) 1 001
c) 89	*f*) 97 248 654

2. Sólo hay un par de primos cuya diferencia es 1. ¿Cuál es el par?
3. Dos números primos impares, cuya diferencia es 2 se llaman primos dobles, 3 y 5 son primos dobles. Dé tres ejemplos más de primos dobles.

MAXIMO COMUN DIVISOR

Supongamos que se desea obtener la expresión más simple del número representado por la fracción $\frac{36}{42}$.* Para proceder en forma eficiente en este

* Esta clase de número se llama número racional. Véase cuaderno 6: *Números racionales.*

caso precisa encontrar el mayor número que sea factor de 36 y de 48. Tal número es el *máximo común divisor** de los números 36 y 48.

Para obtener este máximo común divisor empecemos por escribir el conjunto de todos los factores de 36, y el conjunto de todos los factores de 48, llamando a estos conjuntos A y B, respectivamente. Entonces

$$A=\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\},$$
$$B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}.$$

Estos dos conjuntos tienen los siguientes miembros en común: 1, 2, 3, 4, 6 y 12. Cada uno de estos factores es factor de 36 y 48. Por esta razón, cada uno de ellos se llama *factor común* de estos dos números. El número 12 es el mayor de estos factores comunes y por tanto se llama *máximo común divisor* de 36 y 48.

Recuerde que la intersección de dos conjuntos (ver el cuaderno 1: *Conjuntos*) es el conjunto que contiene a todos los miembros comunes de los dos conjuntos originales, y no tiene otros miembros. Por ejemplo, si

$$P=\{1, 2, 3, 4, 5\},$$
$$Q=\{0, 2, 4, 6, 8\},$$

entonces, la intersección de los conjuntos P y Q está dada por

$$P\cap Q=\{2, 4\}.$$

Luego el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ es la intersección de los conjuntos A y B del párrafo anterior, así escribimos

$$A\cap B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}.$$

El número mayor de este conjunto (12) es el máximo común divisor de 36 y 48. Observemos que todos los otros factores comunes de 36 y 48 son factores de 12.

El lenguaje de la teoría de los conjuntos es útil para describir lo que se entiende por factores comunes y por máximo común divisor de dos números dados. Por tanto, enunciamos:

> *Si* A *y* B *representan los conjuntos de factores de dos números naturales, entonces el máximo común divisor de esos números es el mayor que sea miembro de la intersección de los conjuntos* A *y* B.

* En inglés lo llaman *máximo común factor.* Ahora bien: este cambio de nombre obedece a que si un número es divisor de otro, también es factor del mismo. [N. del T.]

Aunque escribir todos los factores de los dos números dados es una forma conveniente para comprender el concepto de máximo común divisor, no quiere decir que sea en todos los casos la manera más fácil de encontrar dicho común divisor. Frecuentemente la manera más eficiente de encontrarlo consiste en expresar como producto de primos cada uno de los números dados.

Factorizando en primos 36 y 48, tenemos

$$36=2\times2\times3\times3,$$
$$48=2\times2\times2\times2\times3.$$

Buscamos el número mayor que a su vez sea factor de 36 y de 48, observando las factorizaciones vemos que

2 es factor común de 36 y 48,
(2×2) es factor común de 36 y 48,
pero $(2\times2\times2)$ no es factor común de 36 y 48.

De igual modo,

3 es factor común de 36 y 48,
pero 3×3 no es factor común de 36 y 48.

Si empleamos las propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación para agrupar los factores comunes, tenemos

$$36=(2\times2\times3)\times3,$$
$$48=(2\times2\times3)\times2\times2.$$

Entonces $(2\times2\times3)$, o sea 12, es el máximo común divisor de 36 y 48.

Podemos emplear la forma exponencial en el producto de primos:

$$36=2^2\times3^2,$$
$$48=2^4\times3^1.$$

El máximo común divisor o M.C.D. de 36 y 48 no tiene otros factores primos además de 2 y 3. Puede tener 2^2 como factor, pero no 2^3; y puede tener 3^1 como factor, pero no 3^2. Entonces 2^2 es la mayor potencia de 2, que es factor de ambos $2^2\times3^2$ y $2^4\times3^1$; y 3^1 es la mayor potencia de 3, que es el factor de ambos, $2^2\times3^2$ y $2^4\times3^1$. Entonces, $2^2\times3^1$ o sea 12, es el M.C.D. de 36 y 48.

Ahora empleemos el método de factorización en primos para encontrar el M.C.D. de 135 y 126. Primero expresemos 135 y 126 como productos de primos:

$$\begin{array}{r|r} 3 & 135 \\ 3 & 45 \\ 3 & 15 \\ & 5 \end{array} \qquad 135 = 3^3 \times 5$$

$$\begin{array}{r|r} 2 & 126 \\ 3 & 63 \\ 3 & 21 \\ & 7 \end{array} \qquad 126 = 2 \times 3^2 \times 7.$$

Las formas factorizadas $3^3 \times 5$ y $2 \times 3^2 \times 7$ indican que el M.C.D. no puede contener otro factor primo que no sea 3, porque 2, 5 y 7 no son factores comunes; $3^3 \times 5$ tiene a 5 como factor, pero no a 2 y 7; mientras que $2 \times 3^2 \times 7$ tiene a 2 y a 7 como factores, pero no a 5. ¿Cuál es la mayor potencia de 3 que sea factor común de $3^3 \times 5$ y $2 \times 3^2 \times 7$? Obviamente es 3^2. Entonces, 9 es el máximo común divisor de 135 y 126.

Como ejemplo final, supongamos que se dan dos números, llamémoslos a y b cuyas factorizaciones en primos son las siguientes:

$$a = 2^2 \times 3^1 \times 5^2 \times 11^3 \times 13,$$
$$b = 3^3 \times 5^1 \times 11^4 \times 17.$$

(No estamos interesados en ejecutar las multiplicaciones para encontrar numerales más simples de a y b.) El M.C.D. de a y b tendrá como factores primos a 3, 5 y 11, puesto que estos son los únicos primos que aparecen en ambos productos. ¿Cuáles son las mayores potencias de 3, 5 y 11 que sean factores comunes de a y b?, ¿advertimos que son 3^1 y 5^1, y 11^3? El M.C.D. de a y b es $(3 \times 5 \times 11^3)$.

El máximo común divisor de 3 números naturales a, b y c, es el mayor número natural que sea factor de cada uno de estos tres números. El procedimiento empleado para encontrar el M.C.D. de tres números es semejante al procedimiento usado para dos números. Ilustramos esto teniendo en cuenta que .

$$a = 2^2 \times 5^3 \times 11^1,$$
$$b = 2^1 \times 5^2 \times 7^1,$$
$$c = 2^3 \times 3^1 \times 5^4 \times 11^2.$$

El M.C.D. tendrá como factores primos a 2 y 5 y ningún otro. Las potencias mayores de 2 y 5 que son factores de a, b y c son 2^1 y 5^2 respectivamente. El producto de estas potencias $2^1 \times 5^2$, o sea 50, es el M.C.D. de a, b y c.

Si un miembro de un conjunto de números naturales es primo, entonces el M.C.D. de estos números es ese número primo ó 1. Por ejemplo:

el M.C.D. de 7, 12 y 49 es 1, porque 7 es primo y no es factor común de 12 y 49;
el M.C.D. de 13, 52, 130 y 650 es 13, porque 13 es primo y es factor de cada uno de estos tres números.

Grupo de ejercicios 9

1. Para cada uno de los siguientes pares de números escriba el conjunto de factores de cada número. Represente los dos conjuntos con las letras A y B. Después obtenga el conjunto intersección $A \cap B$. Finalmente, escriba el máximo común divisor del par de números dados.

   a) 45, 75 *c*) 24, 48
   b) 21, 77 *d*) 27, 80

2. Utilice el método de factorización en primos para encontrar el M.C.D. de cada uno de los siguientes pares de números.

   a) 35, 275 *c*) 36, 108
   b) 700, 90 *d*) 72, 175

3. Obtenga y exprese como producto de primos el M.C.D. de a, b y c cuyas factorizaciones en primos se indican en seguida.

$$a = 2^3 \times 11 \times 17^2,$$
$$b = 2 \times 17^2 \times 67,$$
$$c = 2 \times 3^3 \times 17^6 \times 67^2.$$

4. Responda a cada una de las siguientes preguntas:

   a) ¿$2^2 \times 3 \times 5$ es factor de $2^2 \times 3^2 \times 5$?
   b) ¿5×7^2 es factor de $5^2 \times 7$?
   c) ¿5×7^2 es factor de $5^2 \times 7^2$?
   d) ¿$3^2 \times 11^3$ es múltiplo de $3^2 \times 11^2$?

MINIMO COMUN MULTIPLO

Algunas veces estamos interesados en encontrar una expresión simple para la suma de dos números representados por fracciones (ver cuaderno 6:

Números racionales), por ejemplo $\frac{3}{8}+\frac{7}{12}$. Deseamos representar $\frac{3}{8}+\frac{7}{12}$ mediante una fracción simple. Para hacer esto, es necesario representar $\frac{3}{8}$ y $\frac{7}{12}$ como fracciones que tengan un común denominador. Para esto, el primer paso consiste en obtener el número que se empleará como denominador común. Debe ser múltiplo de 8 y 12, esto es, deberá tener como factores a 8 y a 12. Uno de tales números es 48, puesto que 48 es igual a 6×8 y $48=4\times 12$. Este múltiplo común puede emplearse para representar a $\frac{3}{8}$ como $\frac{18}{48}$ y a $\frac{7}{12}$ como $\frac{28}{48}$. Entonces:

$$\begin{aligned}\frac{3}{8}+\frac{7}{12}&=\frac{18}{48}+\frac{28}{48}\\&=\frac{18+28}{48}\\&=\frac{46}{48}.\end{aligned}$$

Las palabras *factor* y *múltiplo* frecuentemente se confunden. La relación entre estas dos palabras es análoga a la existente entre "padre" e "hijo" en esta oración: Tomás es el hijo del señor Pérez, y el señor Pérez es el padre de Tomás. Análogamente, 5 es factor de 35 y 35 es múltiplo de 5. El número 2×3^2 es factor del número $2^3\times 3^2$ y $2^3\times 3^2$ es múltiplo de 2×3^2.

El conjunto de múltiplos de 8 tiene un número infinito de miembros lo mismo que el conjunto de los múltiplos de 12. Si representamos estos conjuntos con las letras P y Q podemos escribir:

$$P=\{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, \ldots\},$$
$$Q=\{12, 24, 36, 48, 60, 72, \ldots\},$$

donde los puntos suspensivos indican que la secuencia se puede continuar indefinidamente. No hay ningún múltiplo máximo de 8 ni de 12.

¿Los conjuntos P y Q tienen algunos miembros en común? Sí, 24, 48 y 72, son miembros comunes, llamados *múltiplos comunes* de 8 y 12.

En realidad, puede afirmarse que hay un número infinito de miembros comunes de P y Q. También puede decirse que $P\cap Q$ tiene un número infinito de miembros. Podemos escribir

$$P\cap Q=\{24, 48, 72, \ldots\},$$

los puntos suspensivos indican que la secuencia de números puede continuarse indefinidamente. ¿Cuáles serán los dos siguientes?

Puede inquietarnos el hecho de que $P \cap Q$ tenga un número infinito de miembros, lo que no se justifica porque la pregunta que realmente nos interesa es: ¿cuál es el miembro menor de $P \cap Q$? Podemos ver que es 24. Este número se llama el *mínimo común múltiplo* de 8 y de 12. Tengamos en cuenta que no hay número menor que 24 con 8 y 12 como factores.

En general, si A es el conjunto de múltiplos de un número natural y B es el conjunto de múltiplos de un segundo número natural, entonces el número menor que sea miembro del conjunto $A \cap B$, se llama el mínimo común múltiplo de los dos números naturales.

Obtengamos el mínimo común múltiplo de los números 10, 12 y 15. Los conjuntos de sus múltiplos son

$$\{10, 20, 30, 40, 50, 60, \ldots\},$$
$$\{12, 24, 36, 48, 60, 72, \ldots\},$$
$$\{15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, \ldots\},$$

respectivamente. El número 60 es miembro común de los 3 conjuntos; por tanto, 60 es un múltiplo común de 10, 12 y 15. Los números 120, 180, 240 y muchos más (de hecho un número infinito) son también múltiplos comunes de 10, 12 y 15. El número menor del conjunto de múltiplos comunes

$$\{60, 120, 180, 240, \ldots\},$$

es 60. Este es el número común múltiplo de 10, 12 y 15. No hay número menor que 60 con 10, 12 y 15 como factores. Observe que 120, 180 y 240, etcétera, son múltiplos del mínimo común múltiplo 60.

Otro método para obtener el mínimo común múltiplo —m.c.m. como se abrevia comúnmente— de dos o más números emplea la factorización en primos de estos números. Ilustramos este método con los números del ejemplo anterior: 10, 12 y 15. Para empezar expresemos cada uno de estos números como producto de primos y escribamos la factorización de tal manera que el primo que se repita se vea claramente:

$$\begin{aligned} 10 &= 2 \times 5, \\ 12 &= 2^2 \quad\;\; \times 3, \\ 15 &= \quad\;\; 5 \times 3. \end{aligned}$$

Recuerde que no buscamos el factor común de 10, 12 y 15, sino el múltiplo común, en particular el mínimo común múltiplo. El m.c.m. debe ser múltiplo de 2×5, de $2^2 \times 3$ y también de 3×5. Es decir, ante todo que la factorización de primos del m.c.m. debe incluir los primos 2, 3 y 5; esto es, el m.c.m. debe ser igual a *una potencia de 2 por una potencia 3 por una potencia de 5.* ¿Qué potencia de cada uno de éstos se requerirá? La respuesta es 2^2, 3^1 y 5^1. El m.c.m. de 10, 12 y 15 es $2^2 \times 3^1 \times 5^1$, o sea 60 (lo que está de acuerdo con el resultado del ejemplo anterior). Si aumentáramos cualquiera de los exponentes, el resultado sería un múltiplo común de 10, 12 y 15, pero no sería el mínimo común múltiplo.

Empleemos el método de factorización en primos para hallar el m.c.m. de los tres números siguientes 40, 48 y 75. Encontramos estas factorizaciones en primos:

$$
\begin{aligned}
40 &= 2^3 \times 5, \\
48 &= 2^4 \qquad \times 3, \\
75 &= \qquad 5^2 \times 3.
\end{aligned}
$$

El m.c.m. debe tener a 2, 3 y 5 como factores. Las potencias de éstos que se necesitan son 2^4, 3^1 y 5^2. Entonces el m.c.m. de 40, 48 y 75 es $2^4 \times 3 \times 5^2$, o sea 1 200.

Grupo de ejercicios 10

1. Escriba los primeros 10 múltiplos de cada uno de los siguientes números.

   6, 9, 8, 15.

2. De la lista de múltiplos que escribió en el ejercicio 1, escriba dos múltiplos comunes de cada uno de los siguientes pares de números.

   a) 6 y 9, *b*) 9 y 15, *c*) 6 y 8.

3. ¿Cuál es el mínimo común múltiplo de cada uno de los siguientes pares de números?

   a) 6 y 9, *b*) 9 y 15, *c*) 6 y 8.

4. Encuentre el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de 2, 5 y 7.

5. Use el método de factorización en primos para encontrar el m.c.m. de cada conjunto de números:

   a) 12 y 18
   b) 24 y 32
   c) 25 y 60
   d) 13 y 26
   e) 8, 14 y 21
   f) 15, 25 y 45.

6. Hay un hecho interesante que relaciona el M.C.D. y el m.c.m. de cualesquiera dos números naturales: Si a y b son dos números naturales cualesquiera, entonces

$$(\text{el M.C.D. de } a \text{ y } b) \times (\text{el m.c.m. de } a \text{ y } b) = a \times b$$

EJEMPLO: el M.C.D. de 12 y 20 es *4*; el m.c.m. de 12 y 20 es *60*. El producto de 4×60 es igual al producto de 12×20. Hecho que ilustra lo que se dijo anteriormente.

Proceda de igual modo para cada uno de los siguientes pares de números:

a) 12 y 10
b) 24 y 18
c) 2 y 10
d) 8 y 14.

ALGUNAS PREGUNTAS ACERCA DE LOS NUMEROS

En esta sección se discutirán varias preguntas acerca de los números, de las cuales algunas se contestan muy fácilmente y pueden servir como tema para discutirse en clase. Otras preguntas son más difíciles, tanto que han merecido la atención de grandes matemáticos. Algunas otras preguntas no tienen respuestas aún, a pesar de que los matemáticos llevan años de esfuerzo tratando de contestarlas.

Algunas cosas que se saben acerca de los primos

Los matemáticos están muy interesados en la distribución de los primos, o sea, la forma en que están dispersos entre los números naturales. Es muy grande el entusiasmo y mucha la dedicación que se destina hoy a esta rama de las matemáticas.

1. ¿Hay un número primo máximo? De otro modo podemos plantear esta pregunta: ¿es finito el número de primos?

   Quizá esta pregunta parezca difícil, pero la respuesta es conocida. Euclides, el gran geómetra, probó que no hay un número primo máximo. Esto significa que no importa cuán grande sea el número primo que se encuentre, siempre habrá un número primo mayor.
2. En 1845, el matemático francés Bertrand hizo la siguiente suposición: entre cualquier número natural, excepto 1, y su doble hay cuando menos un número primo. Proposición que se conoce desde hace mucho tiempo como el *postulado de Bertrand.*

   ¿Fue correcta la suposición de Bertrand? Veamos si podemos encontrar un número primo entre 2 y 4, entre 3 y 6, y entre 4 y 8 y entre 5 y 10. Quizá estemos convencidos de que esa suposición es cierta. Sin embargo, recordemos que verificar una afirmación tal como la de Bertrand mediante ejemplos no constituye una demostración, no importa cuántos ejemplos se encuentren.

En 1911, sesenta y seis años después de emitido el postulado de Bertrand, un matemático ruso, Tchebyshev, probó su veracidad.

Preguntas no contestadas acerca de los números primos

1. ¿Hay una fórmula para obtener todos los números primos? No se ha logrado tal fórmula. Sin embargo, hay fórmulas con las que se obtiene un gran número de primos. Una de estas fórmulas es: n^2-n+41. Si sustituimos el número 1 por n, tenemos: $1^2-1+41=41$, que es número primo. Sustituyendo 2 por n, tenemos $2^2-2+41=43$, que es un número primo. Así, seguiremos obteniendo números primos si sustituimos a n por los números 3, 4, 5, 6, etcétera, hasta 40. Entonces podríamos enunciar lo que sigue: la fórmula n^2-n+41 da un número primo para todo número natural que se sustituya por n. Pero, como ironía, la sustitución con el número siguiente, 41 prueba que la suposición es falsa puesto que

   $$(41)^2-41+41=(41)^2=41\times 41, \text{ que no es primo.}$$

2. En el ejercicio 3 del grupo de ejercicios 8, se mencionan los números primos dobles que son un par de números primos impares cuya diferencia es 2. El par (3, 5) aparece como ejemplo y se pidió que se dieran algunos ejemplos más. En seguida tenemos algunos: (5, 7), (11, 13), (17, 19) y (29, 31). Sabemos que los números primos dobles aparecen con menor frecuencia a medida que avanza la numeración. No hay ninguno entre 700 y 800 y tampoco entre 900 y 1 000. *¿Existe un último par de números primos dobles?* Pregunta que hasta ahora no se ha contestado.

3. El matemático Goldbach hizo una suposición que es famosa, conocida como la *conjetura de Goldbach*, que dice: *Todo número par mayor que 2 es la suma de dos números primos.* ¿Será cierta la conjetura de Goldbach? Examinando algunos ejemplos pensaríamos que sí lo es. Tenemos

   $$4=2+2, \qquad 10=7+3,$$
   $$40=11+29 \qquad 122=61+61.$$

   Si encontráramos un número par mayor que 2, que no sea la suma de números primos, demostraríamos que la conjetura es falsa. Nadie ha encontrado jamás tal número. Esto, sin embargo, no es prueba de que la conjetura sea cierta.

Los matemáticos han trabajado con ahínco para encontrar alguna prueba de la conjetura de Goldbach, pero hasta ahora no lo han logrado.

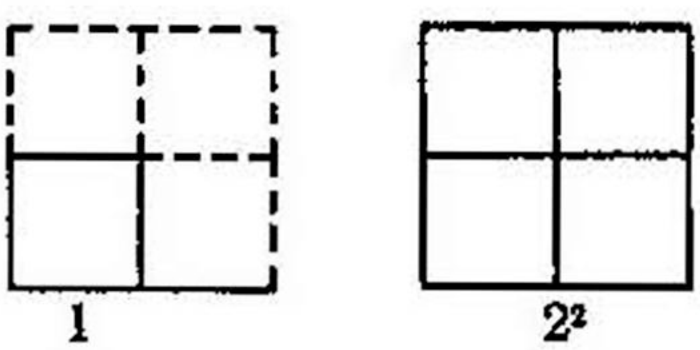
Algunas preguntas interesantes acerca de las sumas

Examinemos las siguientes proposiciones verdaderas sobre el primer número impar, la suma de los dos primeros números impares, la suma de los tres primeros números impares, la suma de los cuatro primeros números impares y la suma de los cinco primeros números impares:

$$1 = 1$$
$$1+3=4$$
$$1+3+5=9$$
$$1+3+5+7=16$$
$$1+3+5+7+9=25.$$

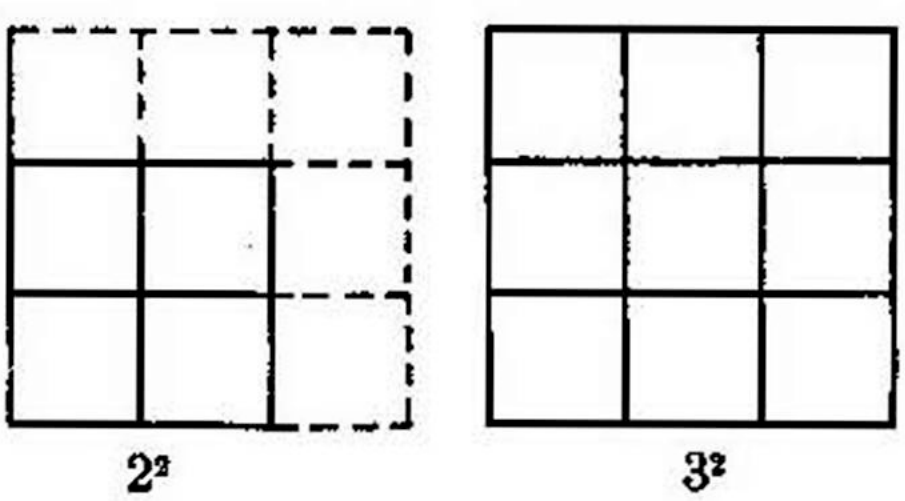
Observemos que el primer número impar es el 1, que es 1^2; la suma de los dos primeros números impares es 4, que es 2^2; la suma de los tres primeros números impares es 9, que es 3^2, y así sucesivamente. Esto sugiere la siguiente pregunta: ¿la suma de los n primeros números impares es igual a $n \times n$ o n^2, sin que importe el número natural que represente a n?

Esta pregunta cuando surge en clase –menos formal y en términos numéricos– puede conducir al alumno a una experimentación fecunda. De hecho la experimentación probablemente deberá preceder a la pregunta



La respuesta es 3:

$$1+3=2^2$$



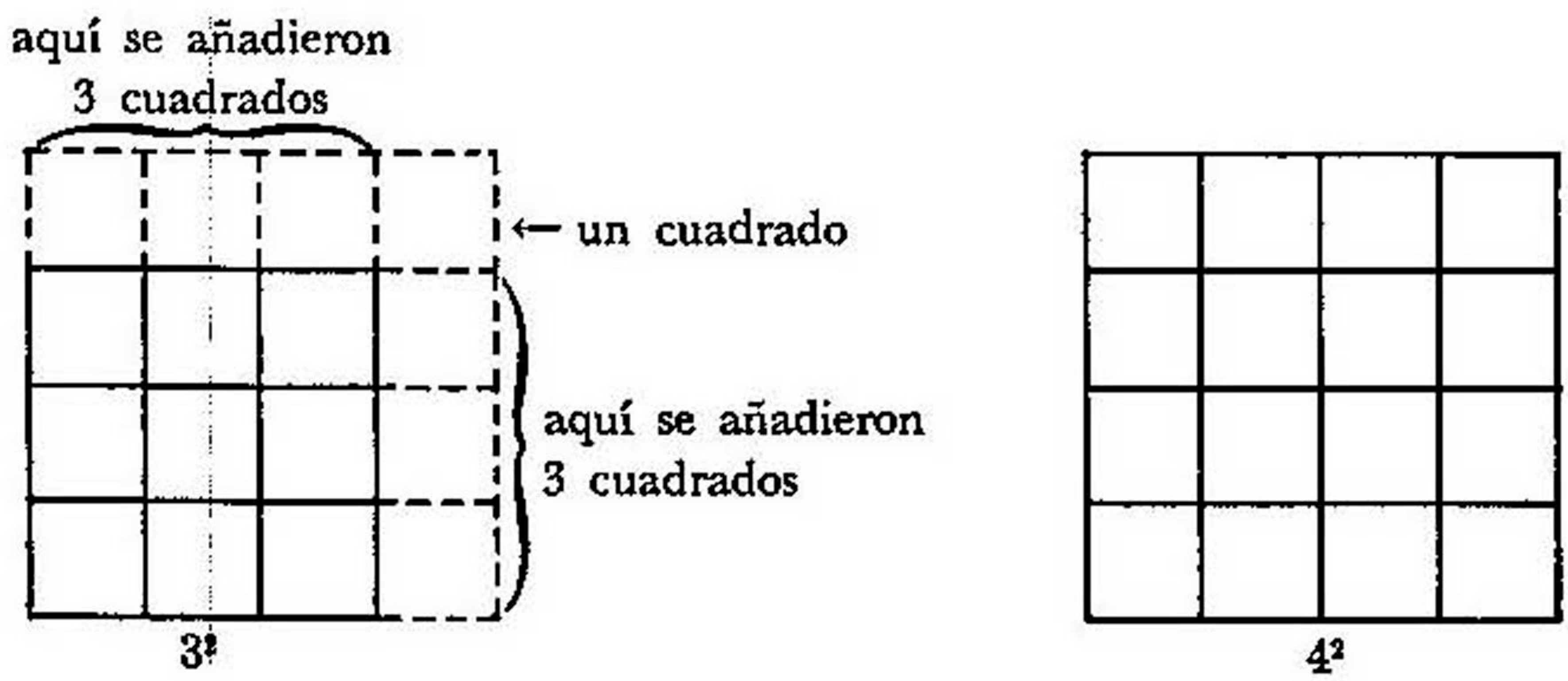
Aquí añadimos 5 cuadrados al cuadro de 2×2 para hacerlo de 3×3.

$$\underbrace{1+3}_{2^2}+5=3^2$$

FIGURA 3

de tal manera que el alumno la plantee por sí mismo. Podría preguntarse ¿la suma de los diez primeros números impares es 10^2? ¿La suma de los primeros 1 000 números impares es $1\,000^2$?

Que la suma de los n primeros números impares es siempre n^2, puede probarse empleando el álgebra. Antes de presentar la prueba veamos estas sumas de otra manera. Si el cuadrado unitario □ representa a 1, ¿cuántos cuadrados unitarios más se necesitarán para hacer un cuadrado de 2×2?



$$\underbrace{1+3+5}_{3^2}+7=4^2$$

FIGURA 4

¿Cuántos cuadrados unitarios se añadieron al cuadrado 3×3 para hacerlo 4×4? Añadimos, como se muestra en la figura 4, 2 grupos de tres cuadrados unitarios y un cuadrado unitario extra:

$$\underbrace{1+3+5}_{3^2}+\underbrace{(2\times 3)+1}_{7}=4^2.$$

Recordemos que $(2\times n)+1$ es la fórmula general para expresar un número impar. Entonces, $(2\times 3)+1$ es el cuarto número del conjunto de los números impares,

$$\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}.$$

Para formar un cuadrado de 5×5 a partir de un cuadrado de 4×4 se necesitan 2 grupos de 4 cuadrados unitarios cada uno, y un cuadrado unitario extra. Entonces, tenemos

$$\underbrace{1+3+5+7}_{4^2}+\underbrace{(2\times 4)+1}_{\text{El } 5^{\circ} \text{ número impar, } 9}=5^2$$

De esta manera nuestro enunciado acerca de la suma de los n primeros números impares, puede justificarse geométricamente.

Otro resultado interesante acerca de la suma de ciertos grupos de números impares puede obtenerse con el siguiente arreglo triangular de números impares:

1)	1				
2)	3	5			
3)	7	9	11		
4)	13	15	17	19	
5)	21	23	25	27	29

Este arreglo triangular puede prolongarse indefinidamente.

Obtengamos ahora la suma de los números de cada renglón. En el primer renglón la suma es 1, en el segundo es 8, en el tercero es 27, en el cuarto es 64, en el quinto es 125. ¿Vemos que las sumas tienen cierta relación con el número de renglones? El cuadro VII muestra la relación.

CUADRO VII

Renglón	*Suma en el renglón*
1	$1=1\times 1\times 1=1^3$
2	$8=2\times 2\times 2=2^3$
3	$27=3^3$
4	$64=4^3$
5	$125=5^3$

Si el cuadro se continuara, encontraríamos que la suma de los números en el sexto renglón sería 6^3, ó 216; y que la suma de los números en el séptimo renglón sería 7^3, o sea 343. (Los alumnos tendrán un estímulo en la verificación de estos resultados para la práctica en la adición y en la obtención de potencias de números.)

Los griegos descubrieron que hay números con una propiedad muy peculiar. Los llamaron números perfectos: 6 y 28 son dos de esos números. Cada uno de estos números es igual a la suma de sus factores incluyendo a 1, pero excluyendo al número considerado. Entonces:

$6=1+2+3$ (1, 2, 3, 6 es el conjunto de todos los factores de 6),
$28=1+2+4+7+14$ (1, 2, 4, 7, 14, 28, es el conjunto de todos los factores de 28).

Los griegos conocieron los primeros cinco números perfectos, que son:

6, 28, 496, 8 128, y 33 550 336.

Los matemáticos han resuelto muchos problemas interesantes acerca de los números perfectos, pero todavía hay preguntas sin respuesta. En 1953, llegaban a diecisiete los números perfectos conocidos; el numeral de base diez para el decimoséptimo tiene 1 937 dígitos.

No tienen respuesta aún las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos números perfectos hay?
2. ¿Hay números perfectos impares? (No se ha encontrado ninguno todavía.)

Quizá nos sorprenda saber que los numerales de todos los números perfectos pares —recuerde que no sabemos cuántos hay— terminan en 28 o en 6.

RESPUESTAS A LOS GRUPOS DE EJERCICIOS

Grupo de ejercicios 1

1. *a*) {12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28} *b*) {83, 85}

2. *a*) 402 *b*) 11, 29, 1 001

3. *a*) $36=2\times 18$ *c*) $328=2\times 164$
   b) $142=2\times 71$ *d*) $1\,000=2\times 500$

4. *a*) $17=(2\times 8)+1$ *c*) $121=(2\times 60)+1$
   b) $39=(2\times 19)+1$ *d*) $1\,363=(2\times 681)+1$

5. 8, 12, y 30 son divisibles entre 2.
   12 y 30 son divisibles entre 3.
   25 y 30 son divisibles entre 5.

6. *a*) $B = \{1, 4, 7, 10 \ldots\}$
   b) $C = \{2, 5, 8, 11 \ldots\}$
   c) Sí.
   d) Sí.
   e) $A = \{0, 3, 6, 9 \ldots\}$
   $B = \{1, 4, 7, 10 \ldots\}$
   $C = \{2, 5, 8, 11 \ldots\}$

   1 es miembro del conjunto B
   2 es miembro del conjunto C
   $(1+2)$ es miembro del conjunto A

   4 es miembro del conjunto B
   5 es miembro del conjunto C
   $(4+5)$ es miembro del conjunto A

7. $(2\times n) + [(2\times k) + 1] = [(2\times n) + (2\times k)] + 1$ Propiedad asociativa de la adición
   $= [2\times(n+k)] + 1$ Propiedad distributiva
   $[2\times(n+k)] + 1$ es un número impar.

8. Si representamos a los números impares mediante $[(2\times n) + 1]$ y $[(2\times k) + 1]$.
   $[(2\times n) + 1] + [(2\times k) + 1] = [1 + (2\times n)] + [(2\times k) + 1]$
   Propiedad conmutativa de la adición
   $= \{[1 + (2\times n)] + (2\times k)\} + 1$
   Propiedad asociativa de la adición
   $= \{1 + [(2\times n) + (2\times k)]\} + 1$
   Propiedad asociativa de la adición
   $= \{1 + [2\times(n+k)]\} + 1$
   Propiedad distributiva
   $= \{[2\times(n+k)] + 1\} + 1$
   Propiedad conmutativa de la adición
   $= [2\times(n+k)] + (1+1)$
   Propiedad asociativa de la adición
   $= [2\times(n+k)] + (2\times 1)$
   $= 2\times(n+k+1)$ Propiedad distributiva
   $2\times(n+k+1)$ es número impar.

9. Si el número par es $(2\times n)$ y el número impar es $[(2\times k) + 1]$.
   $(2\times n) \times [(2\times k) + 1] = [(2\times n) \times (2\times k)] + [(2\times n) \times 1]$
   Propiedad distributiva

$$= \{2\times[n\times(2\times k)]\} + (2\times n)$$

Propiedad asociativa de la multiplicación

$$= 2\times\{[n\times(2\times k)]+n\}$$

Propiedad distributiva

$2\times\{[n\times(2\times k)]+n\}$ es un número par.

Grupo de ejercicios 2

1. *a*) 1, 2, 7, 14
   b) 1, 19
   c) 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42
   d) 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36
   e) 1, 2, 4, 8, 16

2. Para cada uno de éstos hay otros productos.

   a) $18=2\times 9$
   $18=3\times 6$
   $18=1\times 18$

   b) $24=6\times 4$
   $24=2\times 12$
   $24=3\times 8$

   c) $50=1\times 50$
   $50=2\times 25$
   $50=5\times 10$

   d) $27=1\times 27$
   $27=3\times 9$
   $27=3\times 3\times 3$

3. *a*) $8=1\times 8$
   $8=2\times 4$

   b) $18=1\times 18$
   $18=2\times 9$
   $18=3\times 6$

   c) $100=1\times 100$
   $100=2\times 50$
   $100=4\times 25$
   $100=5\times 20$
   $100=10\times 10$

Grupo de ejercicios 3

1.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

2. Todos los números pares tienen el 2 como uno de sus factores. Esto significa que cada número par (excepto 2) tiene por lo menos tres factores 1, 2, y el mismo número; entonces éstos no son números primos, porque los números primos tienen sólo dos factores 1 y el mismo número.

3. 5, 7, y 11, porque $5\times7\times11=385$.

4. En el ejercicio 8 del grupo de ejercicios 1, se demostró que la suma de dos números impares es un número par. De aquí que la suma de dos números primos impares es un número par mayor que 2 (el más pequeño de los números primos impares es 3). Un número par mayor que 2 no puede ser primo.

Grupo de ejercicios 4

1. *a*) 2 544 y 246 312 son divisibles entre 2.
   b) 2 544; 1 000 011 y 246 312 son divisibles entre 3.
   c) 415 es divisible entre 5.
   d) 246 312 es divisible entre 9.

2. $(7\times48)+(7\times13)$ y $(7\times1\,000)+(7\times200)+14$ son divisibles entre 7.

3. En cada caso el residuo es 1.

4. El número es $(3\times5\times7)+1$, o sea 106.

Grupo de ejercicios 5

1.

Número	*Base 5*	*Suma de dígitos*
dos	2	2
cuatro	4	4
seis	11	2
ocho	13	4
diez	20	2
doce	22	4
catorce	24	6
dieciséis	31	4
dieciocho	33	6
veinte	40	4

Número	*Base 5*	*Suma de dígitos*
uno	1	1
tres	3	3
cinco	10	1
siete	12	3
nueve	14	5
once	21	3
trece	23	5
quince	30	3
diecisiete	32	5
diecinueve	34	7

Un número es divisible entre dos siempre y cuando la suma de los dígitos en su numeral de base cinco sea divisible entre dos.

2.

Número	*Númeral de base cinco*	*Suma de dígitos*	*¿Es divisible entre cuatro?*
cuatro	4	4	Sí
ocho	13	4	Sí
doce	22	4	Sí
dieciséis	31	4	Sí
veinte	40	4	Sí
cincuenta y dos	202	4	Sí
veinticuatro	44	8	Sí
ciento ochenta y cuatro	1 214	8	Sí
nueve	14	5	No
once	21	3	No
diecisiete	32	5	No

Si la suma de los dígitos del numeral de base cinco es divisible entre 4, entonces el número representado por el numeral también lo es.

3. Sería una prueba de divisibilidad entre 11.

Número	*Numeral de base doce*	*Suma de dígitos*	*¿Es divisible entre once?*
treinta y tres	29	11	Sí
cuarenta y cuatro	38	11	Sí
cuarenta y ocho	40	4	No
ciento noventa y ocho	146	11	Sí

Si la suma de los dígitos en el numeral de base doce es divisible entre once, el número representado por ese numeral también lo es.

Grupo de ejercicios 6

1. *a*) $28=4\times7$ *c*) $54=6\times9$
   b) $36=2\times18$ *d*) $75=3\times25$

   En cada caso hay otras respuestas correctas.

2. a)
   28
   4×7
   $2\times2\times7$
   $28=2\times2\times7$

   b)
   36
   2×18
   $2\times2\times9$
   $2\times2\times3\times3$
   $36=2\times2\times3\times3$

   c)
   54
   6×9
   $2\times3\times3\times3$
   $54=2\times3\times3\times3$

   d)
   75
   3×25
   $3\times5\times5$
   $75=3\times5\times5$

3. a)
   28
   2×14
   $2\times2\times7$
   $28=2\times2\times7$
   $54=3\times2\times3\times3$

   c)
   54
   3×18
   $3\times2\times9$
   $3\times2\times3\times3$

   b)
   36
   4×9
   $2\times2\times3\times3$
   $36=2\times2\times3\times3$

   d)
   75
   5×15
   $5\times5\times3$
   $75=5\times5\times3$

4. *a*) $4=2\times2$ *c*) $16=2\times2\times2\times2$
   b) $8=2\times2\times2$ *d*) $27=3\times3\times3$

5. $972 = 27 \times 36$
   $972 = (3 \times 3 \times 3) \times (2 \times 2 \times 3 \times 3)$

   El orden de los factores puede alterarse:

$$972 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3.$$

6. *a*) $2^2 \times 11^2$ *b*) 3×31^4 *c*) $3^3 \times 7^2 \times 19$

Grupo de ejercicios 7

1. *a*) $2 \times 2 \times 2 = 8$
   b) $3 \times 5 = 15$
   c) $3 \times 3 \times 7 = 3 \times 21$
   $= 63$
   d) $2^4 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$
   $= 16 \times 5$
   $= 80$
   e) $7^2 = 7 \times 7$
   $= 49$
   f) $2 \times 5 \times 7 \times 11 = 10 \times 7 \times 11$
   $= 10 \times 77$
   $= 770$

2. *a*)
$$\begin{array}{r|r} 2 & 54 \\ 3 & 27 \\ 3 & 9 \\ & 3 \end{array}$$
   $54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$

   b)
$$\begin{array}{r|r} 2 & 100 \\ 2 & 50 \\ 5 & 25 \\ & 5 \end{array}$$
   $100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5$

   c)
$$\begin{array}{r|r} 11 & 121 \\ & 11 \end{array}$$
   $121 = 11 \times 11$

   d)
$$\begin{array}{r|r} 5 & 245 \\ 7 & 49 \\ & 7 \end{array}$$
   $245 = 5 \times 7 \times 7$

   e)
$$\begin{array}{r|r} 2 & 442 \\ 13 & 221 \\ & 17 \end{array}$$
   $442 = 2 \times 13 \times 17$

   f)
$$\begin{array}{r|r} 7 & 1\,001 \\ 11 & 143 \\ & 13 \end{array}$$
   $1\,001 = 7 \times 11 \times 13$

Grupo de ejercicios 8

1. *a*) 69 es compuesto; $69 = 3 \times 23$.
   b) 67 es primo.
   c) 89 es primo.
   d) 101 es primo.
   e) 1 001 es compuesto; $1\,001 = 7 \times 143$.
   f) 97 248 654 es compuesto; es divisible entre 2.

2. El par es 2 y 3.

3. Otros ejemplos de primos dobles son

a) 5 y 7   *b*) 11 y 13   *c*) 17 y 19.

Grupo de ejercicios 9

1. *a*)

$$\begin{aligned} A &= \{1, 3, 5, 9, 15, 45\} \\ B &= \{1, 3, 5, 15, 25, 75\} \\ A \cap B &= \{1, 3, 5, 15\} \end{aligned}$$

El máximo común divisor de 45 y 75 es 15.

b)

$$\begin{aligned} A &= \{1, 3, 7, 21\} \\ B &= \{1, 7, 11, 77\} \\ A \cap B &= \{1, 7\} \end{aligned}$$

El M.C.D. de 21 y 77 es 7.

c)

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} \\ B &= \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\} \\ A \cap B &= \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} \end{aligned}$$

El M.C.D. de 24 y 48 es 24.

d)

$$\begin{aligned} A &= \{1, 3, 9, 27\} \\ B &= \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80\} \\ A \cap B &= \{1\} \end{aligned}$$

El M.C.D. de 27 y 80 es 1.

2. *a*)

$$\begin{aligned} 35 &= 5 \times 7 \\ 275 &= 5^2 \times 11 \\ \text{M.C.D.} &= 5 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 36 &= 2^2 \times 3^2 \\ 108 &= 2^2 \times 3^3 \\ \text{M.C.D.} &= 2^2 \times 3^3 \\ &= 36 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 700 &= 2^2 \times 5^2 \times 7 \\ 90 &= 2 \times 5 \times 3^2 \\ \text{M.C.D.} &= 2 \times 5 \\ &= 10 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} 72 &= 2^3 \times 3^2 \\ 175 &= 5^2 \times 7 \\ \text{M.C.D.} &= 1 \end{aligned}$$

3. El M.C.D. de a, b y c es 2×17^2.

4. *a*) Sí.   *b*) No.   *c*) Sí.   *d*) Sí.

Grupo de ejercicios 10

1. Los primeros diez múltiplos de 6 son

   6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60.

   Los primeros diez múltiplos de 9 son

   9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90.

   Los diez primeros múltiplos de 8 son

   8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80.

   Los diez primeros múltiplos de 15 son

   15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150.

2. *a*) 18 y 36 *b*) 45 y 90 *c*) 24 y 48

3. *a*) 18 *b*) 45 *c*) 24

4. El M.C.D. es 1. El m.c.m. es $2 \times 5 \times 7$, o sea 70

5. *a*)
$$\begin{aligned} 12 &= 2^2 \times 3 \\ 18 &= 2 \times 3^2 \\ \text{m.c.m.} &= 2^2 \times 3^2 \\ &= 36 \end{aligned}$$

   b)
$$\begin{aligned} 24 &= 2^3 \times 3 \\ 32 &= 2^5 \\ \text{m.c.m.} &= 2^5 \times 3 \\ &= 96 \end{aligned}$$

   c)
$$\begin{aligned} 25 &= 5^2 \\ 60 &= 2^2 \times 3 \times 5 \\ \text{m.c.m.} &= 2^2 \times 3 \times 5^2 \\ &= 300 \end{aligned}$$

   d)
$$\begin{aligned} 13 &= 13 \\ 26 &= 2 \times 13 \\ \text{m.c.m.} &= 2 \times 13 \\ &= 26 \end{aligned}$$

   e)
$$\begin{aligned} 8 &= 2^3 \\ 14 &= 2 \times 7 \\ 21 &= 3 \times 7 \\ \text{m.c.m.} &= 2^3 \times 3 \times 7 \\ &= 168 \end{aligned}$$

   f)
$$\begin{aligned} 15 &= 3 \times 5 \\ 25 &= 5^2 \\ 45 &= 5 \times 3^2 \\ \text{m.c.m.} &= 3^2 \times 5^2 \\ &= 225 \end{aligned}$$

6. *a*) $10 = 2 \times 5$
$12 = 2^2 \times 3$
M.C.D. $= 2$
m.c.m. $= 2^2 \times 3 \times 5 = 60$
$10 \times 12 = 2 \times 60$

b) $24 = 2^3 \times 3$
$18 = 2 \times 3^2$
M.C.D. $= 2 \times 3 = 6$
m.c.m. $= 2^3 \times 3^2 = 72$
$24 \times 18 = 6 \times 72$

c) $2 = 2$
$10 = 2 \times 5$
M.C.D. $= 2$
m.c.m. $= 2 \times 5 = 10$
$2 \times 10 = 2 \times 10$

d) $8 = 2^3$
$14 = 2 \times 7$
M.C.D. $= 2$
m.c.m. $= 2^3 \times 7 = 56$
$8 \times 14 = 2 \times 56$

su cátedra, como a los alumnos en su aprendizaje.
Los títulos de los cuadernos de esta colección son: 1. Conjuntos. 2. Números enteros. 3. Sistemas de numeración para los números enteros. 4. Algoritmos de las operaciones con números enteros. 5. Números y sus factores. 6. Números racionales. 7. Sistemas de numeración para los números racionales y 8. Proposiciones numéricas.

OTROS TITULOS

Manual de matemáticas mercantiles

Manuel Torres Torija

Trata de alejar del estudiante la impresión de que la materia es árida o difícil. Principia por encauzar el estudio de los cálculos mercantiles, haciendo un repaso sucinto con objeto de recordar y reafirmar los conceptos estudiados. Consta de seis secciones que van desde potencias y raíces hasta logaritmos, arbitraje de cambio directo, etc.

272 páginas. Rústica 15 x 22 cm.

Cómo plantear y resolver problemas

G. Polya

He aquí un pequeño tesoro para los maestros y estudiantes de matemáticas, para los aficionados y en general, para todo aquel que quiera saber cómo resolver problemas.
Es sumamente interesante porque, además del aspecto nuevo que presenta de las matemáticas, su proceso de invención, como ciencia experimental e inductiva, proporcionando no la solución estereotipada de los problemas, sino los procedimientos originales de cómo se llegó a su solución, da los caminos para resolver problemas en cuanto tales y dispone los elementos del pensamiento de tal manera que instintivamente actúen cuando se presente un problema por resolver.

216 páginas - Rústica - 15 x 22 cm